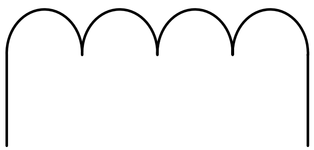
Induttori e induttanza

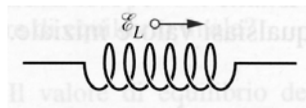
Un induttore o induttanza è un dispositivo elettronico che immagazzina energia sottoforma di campo magnetico così come il condensatore immagazzina energia sotto forma di campo elettrico.

Il flusso concatenato con l’induttore è direttamente proporzionale alla corrente che lo attraversa e la costante di proporzionalità L è detta induttanza

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = Li$$

Il simbolo circuitale è





L’induttanza si misura in Henry $\quad 1\,\text{henry} = 1\ T \cdot \dfrac{m^2}{A}$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Calcolo dell'Induttanza di un induttore

Considero un'induttanza di lunghezza l e densità di spire n.

Il flusso concatenato sarà

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = \left(nl\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)$$

Essendo il campo magnetico interno

$$B = \mu_0 i n$$

Si avrà

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = \left(nl\right)\left(\mu_0 i n A\right) = \mu_0 i n^2 l A = \underbrace{\left(\mu_0 n^2 l A\right)}_{L} i$$

$$L = \mu_0 n^2 l A$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Calcolo dell'Induttanza di un solenoide

Per un solenoide si definisce l'induttanza per unità di lunghezza e quindi

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$$

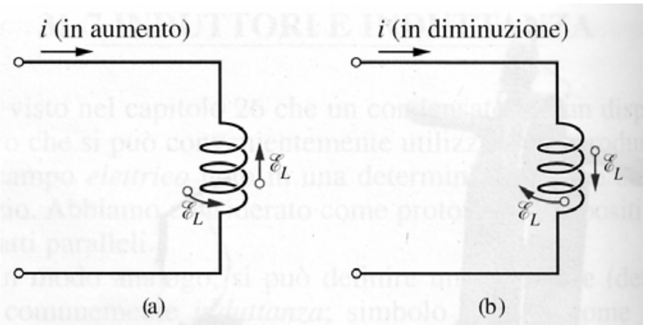
Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Autoinduzione

- Quando in un induttore varia la corrente i che lo attraversa, questa variazione genera una f.e.m. indotta che si oppone alla variazione stessa

$$V_L = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Questa f.e.m. è detta forza elettromotrice autoindotta



A-la corrente aumenta e la f.e.m. autoindotta si contrappone all'aumento

B-la corrente diminuisce e la f.e.m. autoindotta sostiene la corrente in diminuzione

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Effetto selettivo dell’induttore su segnali alternati

$$V_L = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

La f.e.m. autoindotta è proporzionale alla derivata della corrente e quindi alla velocità di variazione della corrente.

Segnali alternati ad alta frequenza fanno più “fatica” ad attraversare l’induttore rispetto a segnali a bassa frequenza.

L’energia immagazzinata nell’induttore è espressa dall’equazione

$$E = \frac{1}{2}Li^2$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Effetto selettivo delle capacità su segnali alternati

$$i(t) = C\frac{dV_C}{dt} \qquad V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

La f.e.m. dipende dall'integrale della corrente.

Segnali alternati ad alta frequenza fanno meno "fatica" ad attraversare la capacità rispetto a segnali ad alta frequenza.

L'energia immagazzinata nella capacità è espressa dall'equazione

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2C}Q^2$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Correnti alternate

Quando un generatore di f.e.m. produce in un circuito una d.d.p. variabile nel tempo

$$V = V_0 \sin(\omega t)$$

la corrente creata non sarà costante ma varabile anch’essa nel tempo; parleremo allora correnti alternate.

$$I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$$

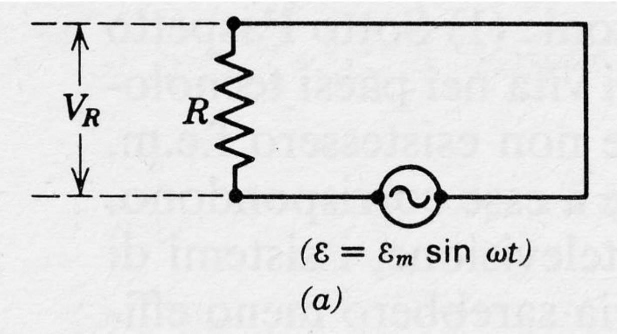
Analizziamo i vari casi di circuiti ad una maglia contenenti un solo elemento circuitale oltre al generatore.

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito resistivo

In un circuito resistivo, applicando la legge di Kirchhoff ,

$$v_R = V_R \sin(\omega t) = Ri$$

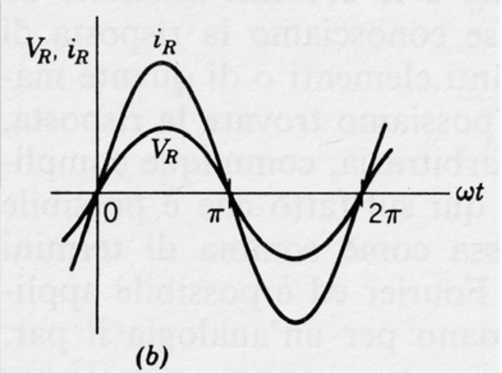


avremo da cui

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \sin(\omega t)$$

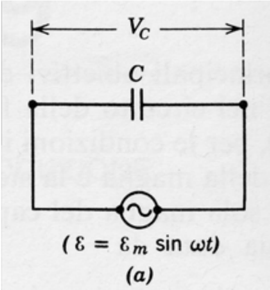
la corrente nel circuito è quindi con la stessa fase del generatore.

$$i = I_R \sin(\omega t - \phi)$$



Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito capacitivo

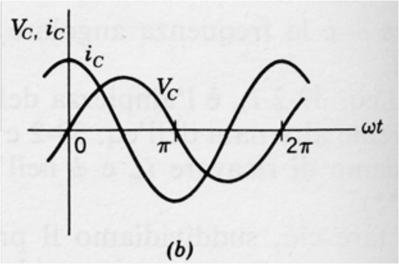


In un circuito capacitivo, applicando la legge di Kirchhoff, avremo

$$v_C = V_C \sin(\omega t)$$

e dovremo considerare anche la relazione

$$v_C = \frac{q}{C}$$



da cui risulta

$$q = CV_C \sin(\omega t)$$

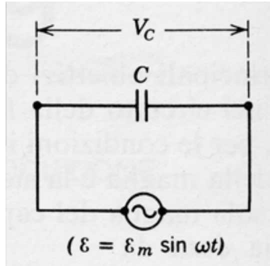
che derivata ci fornisce la corrente del circuito

$$i_C = \omega CV_C \cos(\omega t)$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito capacitivo

Confrontando questa relazione con quella precedentemente trovata per i circuiti resistivi, ovvero ispirandosi alla legge di Ohm, avremo



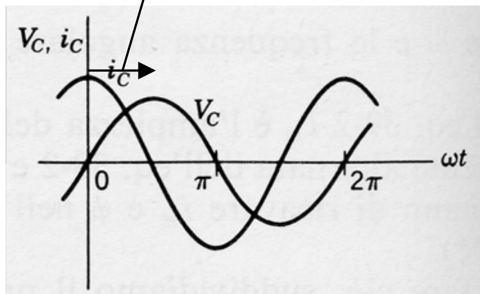
(a)

$$i_C = \omega C V_C \cos(\omega t) = \frac{V_C}{X_C} \cos(\omega t)$$

Arriva dopo al massimo la d.d.p.

avendo posto

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$$



(b)

la corrente nel circuito è quindi sfasata rispetto a quella erogata dal generatore, in particolare anticipa di $\frac{\pi}{2}$ e la quantità X_C , equivalente nel circuito alla resistenza, è detta reattanza capacitiva.

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

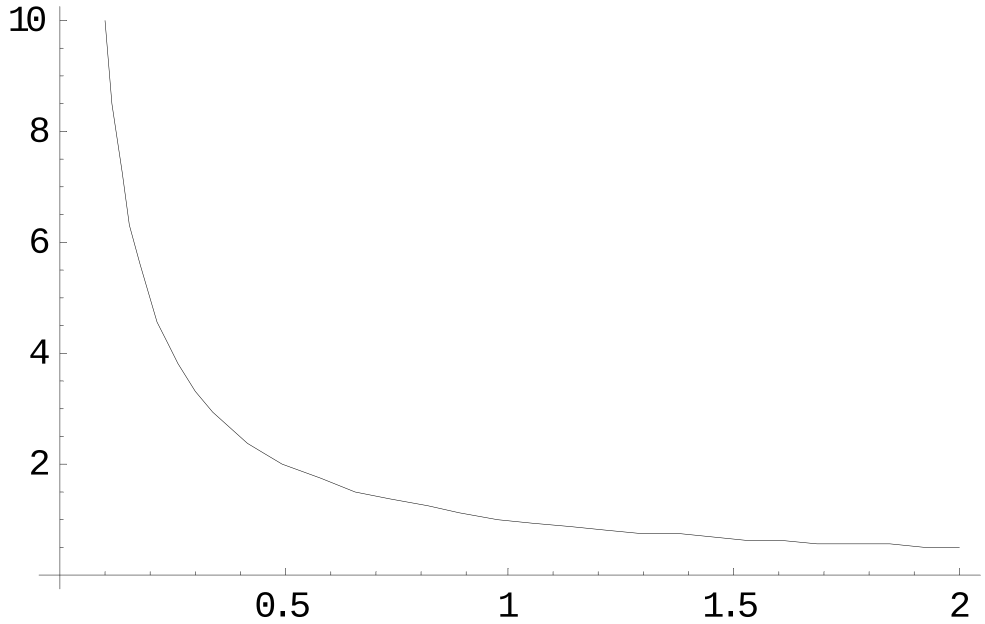
$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito capacitivo

Segnali a differente frequenza incontrano quindi una differente reattanza capacitiva ovvero subiscono una differente attenuazione

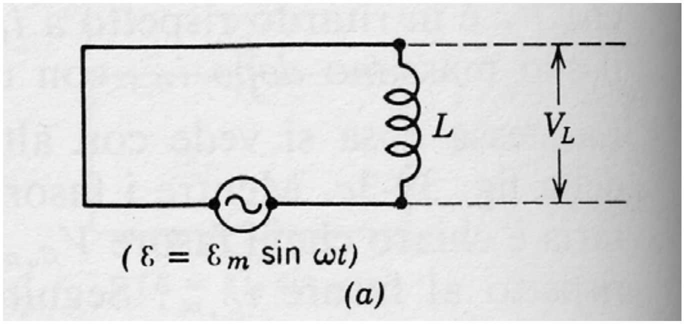
$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$



La reattanza capacitiva cala al crescere della frequenza e quindi i segnali di frequenza superiore potranno “passare” sul condensatore generando una caduta di potenziale inferiore

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito induttivo



In un circuito induttivo, applicando la legge di Kirchhoff, avremo

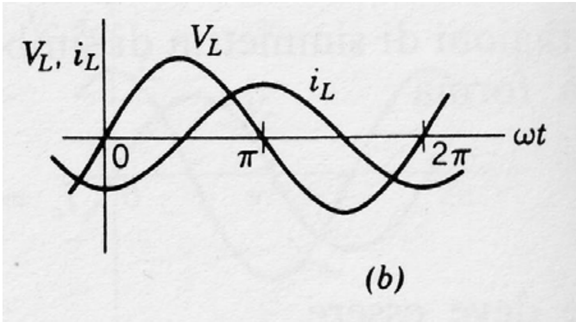
$$v_L = V_L \sin(\omega t)$$

e dovremo considerare anche la relazione che $v_L = L\dfrac{di}{dt}$ fornisce la tensione ai capi di una induttanza percorsa da corrente variabile nel tempo.

Risulta quindi

$$L\frac{di}{dt} = V_L \sin(\omega t)$$

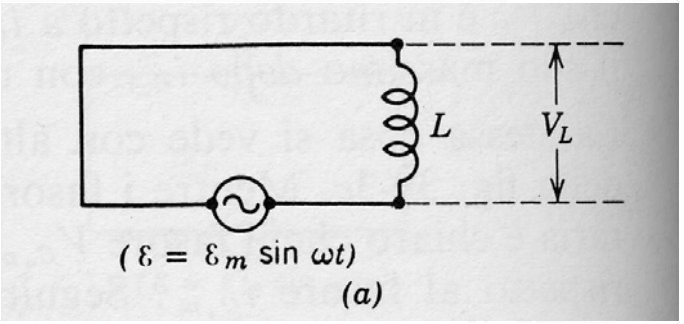
che integrata ci fornisce la corrente del circuito



$$\int di = \int \frac{V_L}{L}\sin(\omega t)dt$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito induttivo



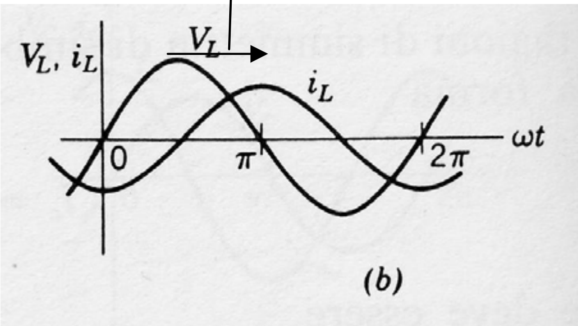
Si avrà

$$i_L = -\frac{V_L}{\omega L}\cos(\omega t)$$

Confrontando questa relazione con quelle precedentemente trovate per i circuiti resistivi e capacitivi, ovvero ispirandosi alla legge di Ohm, avremo

Arriva dopo al massimo la corrente

$$i_L = -\frac{V_L}{\omega L}\cos(\omega t) = -\frac{V_L}{X_L}\cos(\omega t) = \frac{V_L}{X_L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



avendo posto

$$X_L = \omega L$$

e

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

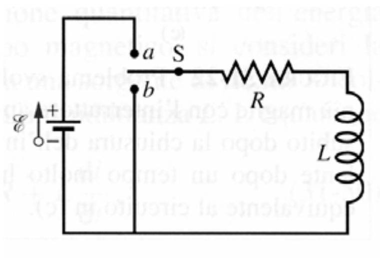
la corrente nel circuito è quindi sfasata rispetto a quella erogata dal generatore, in particolare ritarda di $\frac{\pi}{2}$ e la quantità X_L, equivalente nel circuito alla resistenza, è detta reattanza induttiva.

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito RL

Per un circuito RL in carica avrò

$$Ri = V_0 - L\frac{di}{dt} \qquad Ri + L\frac{di}{dt} = V_0$$



Per un circuito RL in scarica avrò

$$Ri = -L\frac{di}{dt} \qquad Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito RL

I circuiti RL vengono risolti con le stesse procedure utilizzate per i circuiti RC.

Per un circuito RL in scarica avrò

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \qquad \int_{i_0}^{i}\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_{0}^{t}dt$$

$$\ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{R}{L}t \qquad i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}} \qquad \tau_L = \frac{L}{R}$$

$$V_L = -L\frac{di}{dt} = L\frac{i_0}{\tau_L}e^{-\frac{t}{\tau_L}} = L\frac{Ri_0}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}} = Ri_0e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito RL

Per la carica avrò un risultato simile al circuito RC

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0$$

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

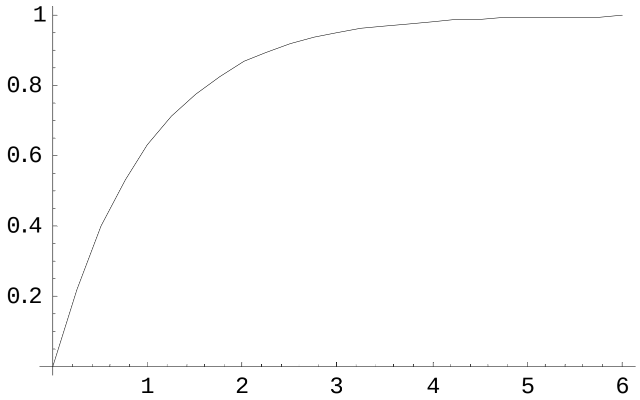
$$i(t) = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Corrente nel circuito

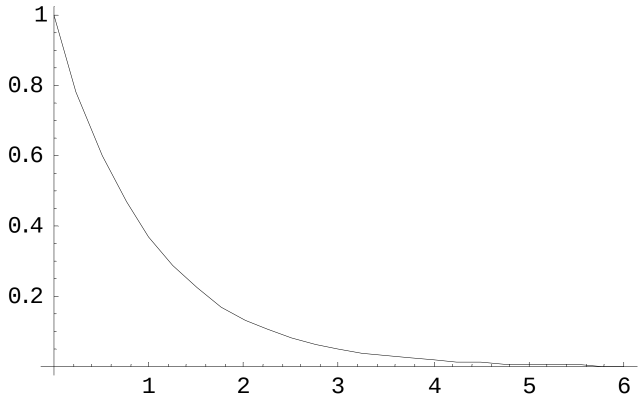
Carica

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$



Scarica

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$



Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Numeri complessi

$$x^2 + 1 = 0$$

L’equazione non ha soluzioni nel campo reale anche se formalmente non pare difficile ipotizzare che esistano e siano

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

Infatti

$$\left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 + 1 = 0$$

Definisco l’unità immaginaria

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

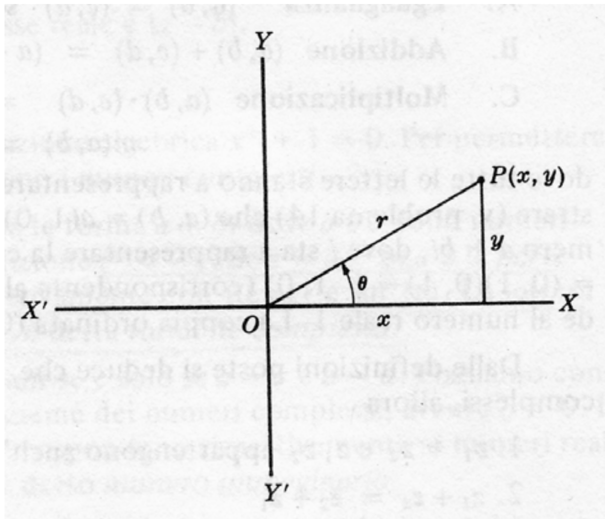
Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Numeri complessi

Rappresentazione algebrica

$$z = x + iy$$

Rappresentazione cartesiana



$$z = r(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = arctg\,\frac{y}{x}$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Impedenza

Consideriamo un circuito alimentato da una f.e.m. alternata $V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$

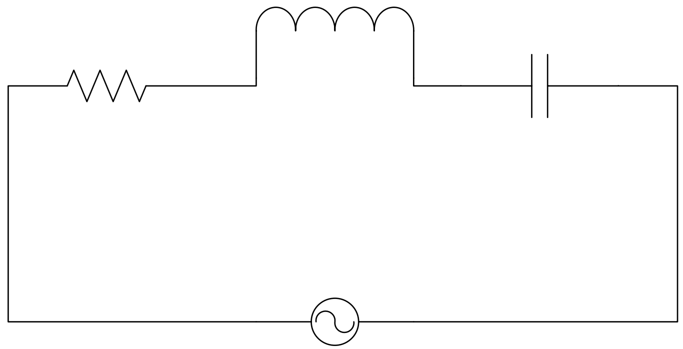
Esiste una grandezza “vettoriale” che tiene conto della dipendenza dagli elementi circuitali e dalla frequenza dei segnali

$$\vec{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \left|\vec{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

L’impedenza è un numero complesso

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito RLC-Formalismo complesso



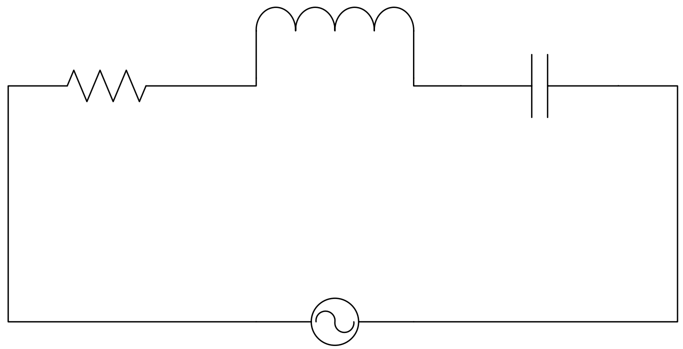
Per risolvere il circuito RLC tenendo conto degli sfasamenti dovuti ai differenti elementi circuitali si ricorre al formalismo complesso

$$\vec{i}(t) = \vec{i}_0 e^{i\omega t} \qquad \vec{V}(t) = \vec{V}_0 e^{i\omega t} \qquad Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V(t)$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \qquad -\omega^2 L\vec{i} + i\omega R\vec{i} + \frac{\vec{i}}{C} = i\omega\vec{V}$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito RLC-Formalismo complesso



$$-\omega^2 L\vec{i} + i\omega R\vec{i} + \frac{\vec{i}}{C} = i\omega\vec{V}$$

Dividendo per $i\omega$ avrò

$$\vec{i}\underbrace{\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}_{\vec{Z}} = \vec{V}$$

Che scriveremo infine come una nuova forma della legge di OHM generalizzata

$$\vec{i}\,\vec{Z} = \vec{V}$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Induttivo

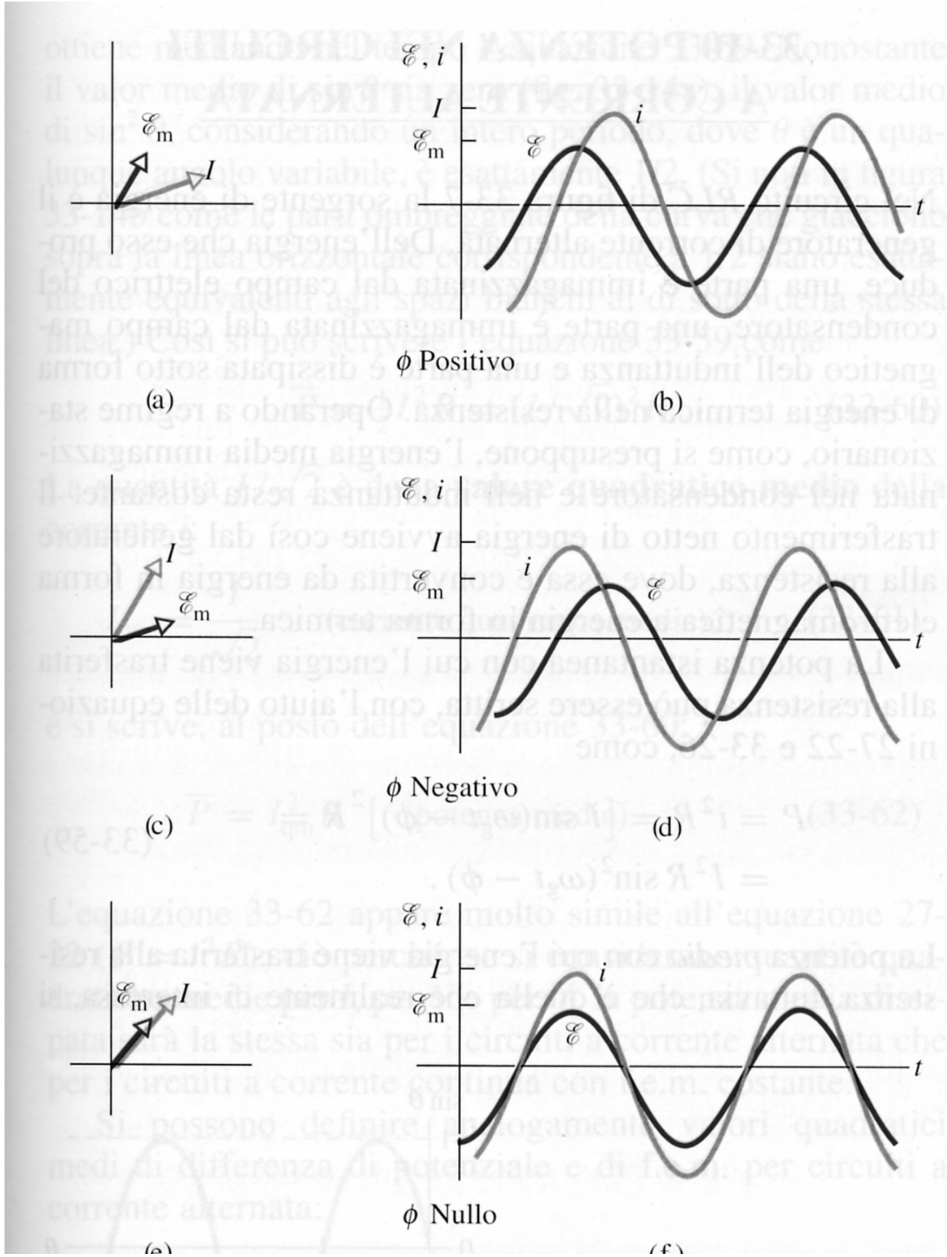
$$X_L > X_C$$

Capacitivo

$$X_L < X_C$$

Resistivo

$$X_L = X_C$$



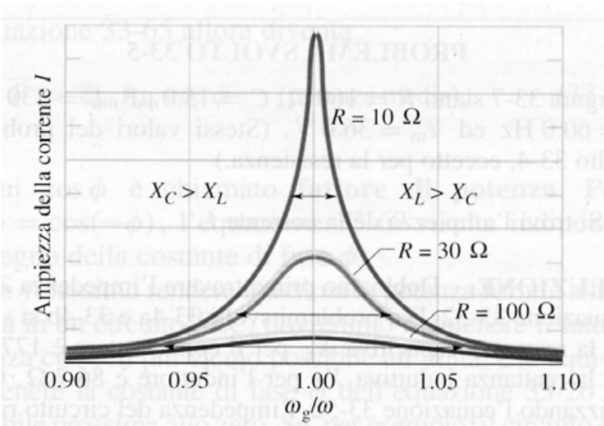
Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Frequenza di risonanza

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad X_L = X_C$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il circuito RLC presenta un comportamento resistivo: tensione e corrente sono in fase



Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito LC

Il circuito LC è costituito da una maglia contenente un condensatore e un induttore.

Per risolvere quantitativamente il circuito si deve considerare la conservazione dell'energia:

$$E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2C} Q^2$$

Da cui si ha, derivando

$$L i \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} Q \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC} \right) Q = 0$$

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Circuito LC

Posto

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

La soluzione sarà della forma

$$Q = Q_0 \sin(\omega t + \phi)$$

E per la corrente avrò

$$i = \frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega \cos(\omega t + \phi)$$

L'energia oscilla tra condensatore e induttore modificando il suo immagazzinamento ma non la sua quantità

Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna

Fig. 3-4 - Esempio di semplice ricevitore a conversione diretta.

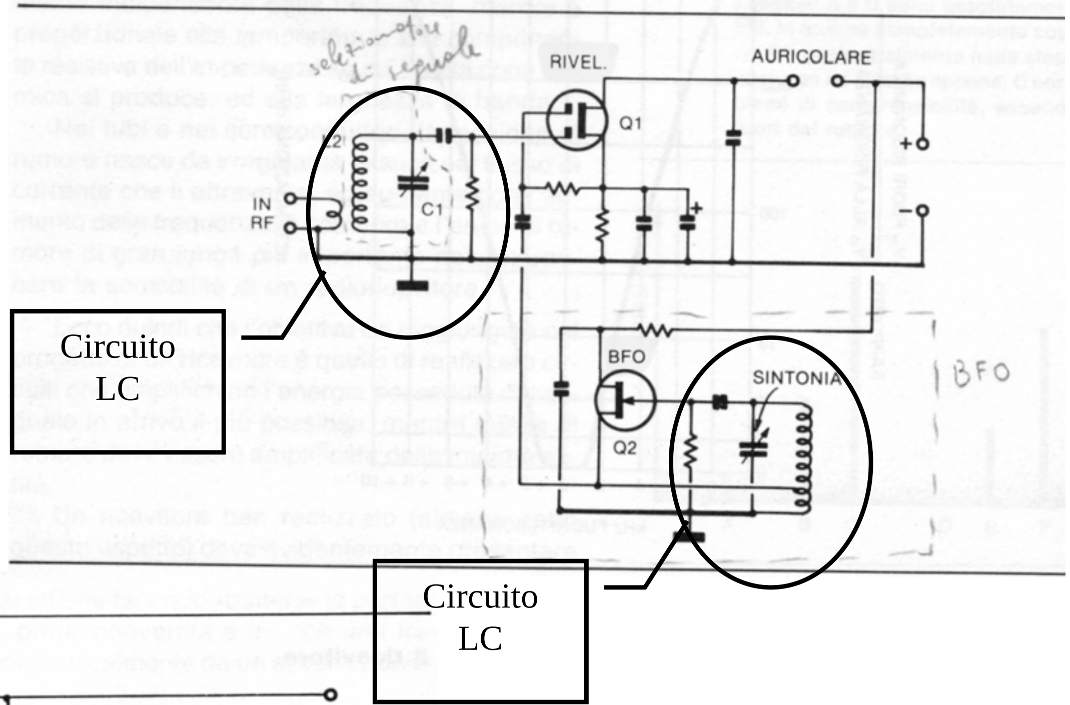
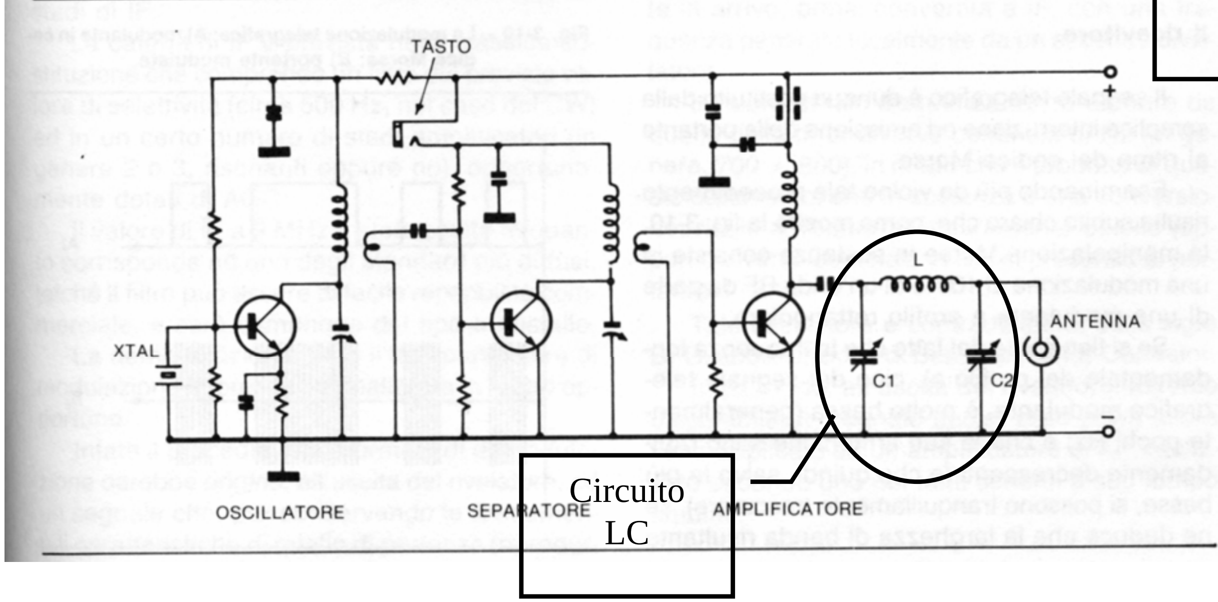


Fig. 3-9 - Semplice versione di trasmettitore per CW a transistori.



Andrea Zucchini
Liceo Scientifico E. Fermi
Bologna