

Trasformatore

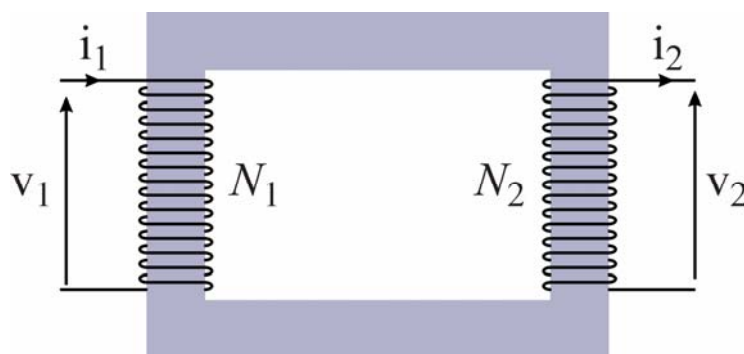
Parte 1

Trasformatore monofase

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm

(versione del 31-10-2012)

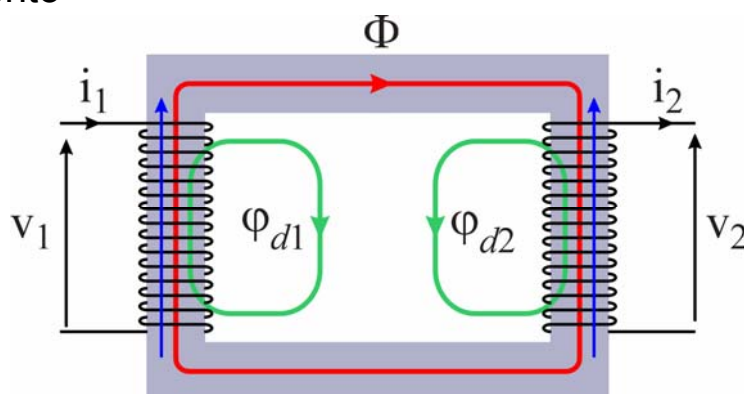
Schema di principio



- Il **trasformatore** è una macchina elettrica statica (priva di parti in movimento)
- E' costituito da due avvolgimenti (detti **primario** e **secondario**) aventi rispettivamente N_1 e N_2 spire avvolti su un nucleo di materiale ferromagnetico
- E' un componente a due porte che consente di trasferire potenza elettrica tra due circuiti elettrici non collegati tra loro, ma accoppiati per mezzo di un circuito magnetico

Ipotesi sul campo magnetico

- Se gli avvolgimenti sono percorsi da corrente viene generato un campo magnetico
- Si assume che le linee di flusso abbiano andamenti qualitativi corrispondenti ai tre tipi indicati in figura
 - ◆ linee che si sviluppano interamente nel nucleo e si concatenano con entrambi gli avvolgimenti
 - ◆ linee che si sviluppano in parte in aria e si concatenano con un solo avvolgimento



3

Flussi di induzione magnetica (1)

- Il flusso di induzione magnetica Φ dovuto a linee di campo che si concatenano con entrambi gli avvolgimenti è detto **flusso principale**
- I flussi concatenati con il solo avvolgimento primario o il solo avvolgimento secondario sono detti **flussi di dispersione**
 - ◆ La riluttanza dei tubi di flusso di dispersione è determinata prevalentemente dai tratti in aria
 - ➔ è sempre lecito trascurare gli effetti di non linearità del nucleo e assumere che i flussi di dispersione siano proporzionali alle correnti

$$\Phi_{d1} = L_{d1} i_1$$

$$\Phi_{d2} = L_{d2} i_2$$

$$L_{d1}, L_{d2} = \text{induttanze di dispersione}$$

- ◆ L_{d1} e L_{d2} sono correlate ai soli flussi dispersi, quindi non rappresentano le induttanze dei due avvolgimenti

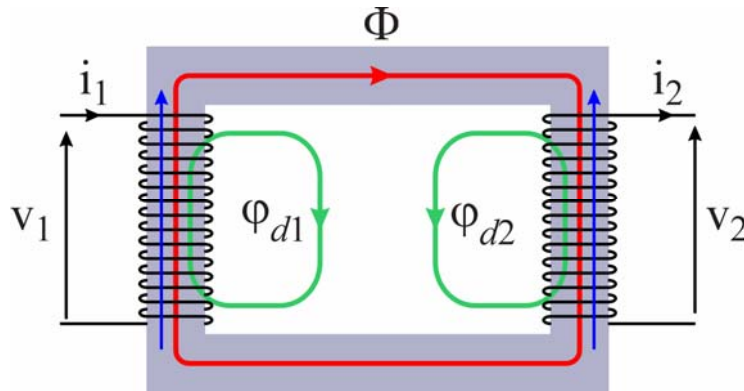
4

Flussi di induzione magnetica (2)

- Flussi totali concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1\Phi + \varphi_{d1} = N_1\Phi + L_{d1}i_1$$

$$\Phi_{c2} = -N_2\Phi + \varphi_{d2} = -N_2\Phi + L_{d2}i_2$$



5

Equazioni interne

- Circuito primario**

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + \frac{d\Phi_{c1}}{dt} = R_1 i_1(t) + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

R_1 = resistenza dell'avvolgimento primario

- Circuito secondario**

$$v_2(t) = -R_2 i_2(t) - \frac{d\Phi_{c2}}{dt} = -R_2 i_2(t) - L_{d2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

R_2 = resistenza dell'avvolgimento secondario

- Circuito magnetico**

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$$

\mathcal{R} = riluttanza del nucleo

6

Equazioni in condizioni di regime sinusoidale

- **Ipotesi**

- ◆ Il primario è alimentato da una tensione $v_1(t)$ sinusoidale
- ◆ Il secondario è collegato a un carico lineare
- ◆ E' possibile trascurare gli effetti non lineari nel nucleo
- ➔ In condizioni di regime tutte le grandezze dipendenti dal tempo variano con legge sinusoidale
- ➔ E' possibile applicare la trasformata di Steinmetz alle equazioni interne

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + j\omega N_1\Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + j\omega N_2\Phi$$

$$N_1\mathbf{I}_1 - N_2\mathbf{I}_2 = \mathcal{R}\Phi$$

7

Effetti dissipativi in un trasformatore

- Nel modello sviluppato fino a a questo punto si è tenuto conto solo degli effetti dissipativi dovuti alle resistenze degli avvolgimenti
 - ➔ **“perdite nel rame”**
- Altri fenomeni dissipativi avvengono all'interno del nucleo magnetico
 - ➔ **“perdite nel ferro”**
 - ◆ **Perdite per correnti parassite (correnti di Foucault)**
 - Se il flusso di induzione magnetica nel nucleo varia nel tempo all'interno del nucleo si hanno delle forze elettromotrici indotte
 - A causa della conducibilità del materiale ferromagnetico all'interno del nucleo si hanno delle correnti
 - ➔ Dissipazione di energia per effetto Joule
 - ◆ **Perdite per isteresi**

8

Correnti parassite (1)

- Induzione magnetica \mathbf{B} uniforme, ortogonale alle sezioni trasversali e variabile con legge sinusoidale
- Si può pensare che in ogni sezione trasversale del nucleo esistano dei circuiti elettrici elementari
- Se S indica l'area della sezione racchiusa da un circuito elementare, il flusso concatenato è

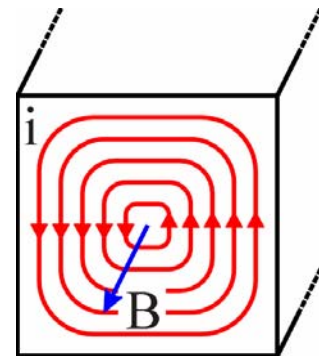
$$\Phi = SB_M \cos \omega t$$

- ➔ Forza elettromotrice indotta

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega SB_M \sin \omega t = E_M \sin \omega t$$

- ➔ Se R è la resistenza di un circuito elementare, la potenza media dissipata in un periodo è

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{E_M^2}{R} = \frac{\omega^2 S^2 B_M^2}{2R}$$



9

Correnti parassite (2)

- La trattazione precedente giustifica intuitivamente la formula semiempirica

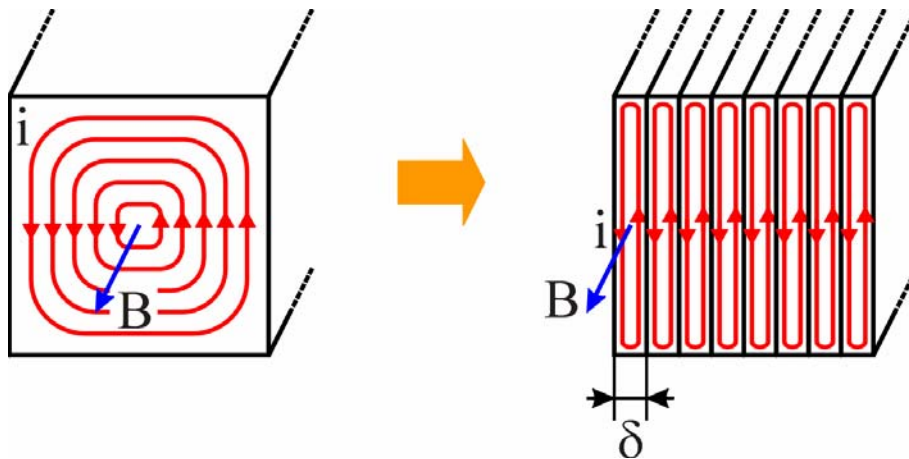
$$p_{CP} = K_{CP} f^2 B_M^2$$

- ◆ p_{CP} = potenza dissipata per unità di peso del materiale
- ◆ f = frequenza
- ◆ B_M = induzione massima
- ◆ K_{CP} = costante dipendente dalla forma della sezione e dal materiale (inversamente proporzionale alla resistività)
- Per ridurre le perdite dovute alle correnti parassite
 - ◆ si utilizzano leghe ad elevata resistività (ferro-silicio)
 - ◆ si ricorre alla **laminazione del nucleo**

10

Laminazione del nucleo (1)

- Il nucleo è formato da sottili lamierini sovrapposti e isolati tra loro
- Le correnti parassite si possono richiudere solo all'interno dei lamierini
 - ◆ i percorsi interessati dalle correnti parassite hanno sezione minore
 - ➔ resistenza più elevata
 - ➔ a parità di f.e.m. indotta si hanno correnti minori
 - ◆ l'area delimitata dalle linee di corrente è minore
 - ➔ riduzione del flusso concatenato e quindi della f.e.m. indotta



11

Laminazione del nucleo (2)

- Nel caso di un nucleo laminato, la potenza dissipata per unità di peso può essere espressa mediante la relazione

$$p_{CP} = k_{CP} \delta^2 f^2 B_M^2$$

- ◆ p_{CP} = potenza dissipata per unità di peso del materiale
- ◆ f = frequenza
- ◆ B_M = induzione massima
- ◆ δ = spessore di un lamierino
- ◆ k_{CP} = costante dipendente dal materiale

12

Perdite per isteresi

- Ad ogni ciclo di isteresi corrisponde un'energia dissipata per unità di volume pari all'area racchiusa dal ciclo stesso
- ➔ Le perdite per isteresi nel nucleo di un trasformatore dipendono
 - ◆ dal numero di cicli di isteresi nell'unità di tempo, determinato dalla frequenza f
 - ◆ dall'area del ciclo di isteresi, determinata dal valore massimo dell'induzione magnetica B_M

- ➔ La potenza dissipata può essere espressa mediante la formula semiempirica

$$p_I = k_I f B_M^{1.6}$$

- ◆ p_I = potenza dissipata per unità di peso
- ◆ f = frequenza
- ◆ B_M = induzione massima
- ◆ k_I = costante dipendente dal materiale

13

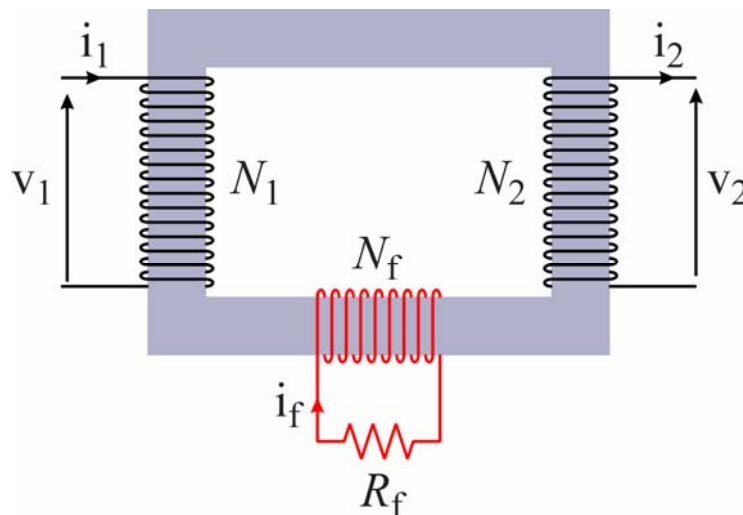
Dipendenza dalle tensioni e dalla frequenza

- Perdite per correnti parassite: $p_{CP} = k_{CP} \delta^2 f^2 B_M^2$
- Perdite per isteresi: $p_I = k_I f B_M^{1.6}$
- Se si trascura la caduta di tensione su R_1 e L_{d1} si ha
$$\mathbf{V}_1 \cong j\omega N_1 \Phi = j2\pi f N_1 S \mathbf{B}$$
 - ◆ Se \mathbf{V}_1 è fissata, il valore massimo dell'induzione magnetica B_M è circa inversamente proporzionale alla frequenza
 - ➔ le perdite per correnti parassite sono praticamente costanti al variare di f
 - ➔ le perdite per isteresi diminuiscono al crescere di f
 - ◆ Se f è fissata, B_M è direttamente proporzionale all'ampiezza di $v_1(t)$
 - ➔ le perdite aumentano all'aumentare dell'ampiezza di $v_1(t)$

14

Rappresentazione delle perdite nel ferro

- Per tenere conto delle perdite nel ferro si può modificare il modello introducendo un terzo avvolgimento fittizio caricato da una resistenza R_f
- Il valore della resistenza e il numero di spire dell'avvolgimento vanno scelti in modo che la potenza dissipata su R_f coincida con la potenza dissipata a causa delle perdite nel ferro



15

Rappresentazione delle perdite nel ferro

- Per l'avvolgimento fittizio vale la relazione

$$R_f \mathbf{I}_f + j\omega N_f \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_f = -j\omega \frac{N_f}{R_f} \Phi$$

- Con il terzo avvolgimento l'equazione del circuito magnetico diviene

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 + N_f \mathbf{I}_f = \mathcal{R} \Phi$$

cioè

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

$$K_f = \frac{N_f^2}{R_f}$$

- ➔ Le equazioni interne diventano

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1}) \mathbf{I}_1 + j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2}) \mathbf{I}_2 + j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

16

Trasformatore ideale (1)

- Il **trasformatore ideale** è caratterizzato dalle seguenti proprietà:
 - ◆ avvolgimenti con resistenza nulla → $R_1 = R_2 = 0$
 - ◆ assenza di flussi dispersi → $L_{d1} = L_{d2} = 0$
 - ◆ nucleo con permeabilità infinita → $\mu = \infty$ → $\mathcal{R} = 0$
 - ◆ assenza di effetti dissipativi nel nucleo → $K_f = 0$

- In queste condizioni le equazioni interne divengono

$$\mathbf{V}_1 = j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = 0$$



$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$$

17

Trasformatore ideale (2)

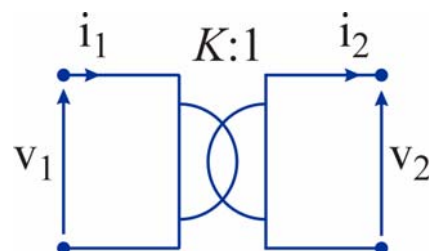
Equazioni caratteristiche

$$v_1(t) = K v_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{1}{K} i_2(t)$$

$$K = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{rapporto di trasformazione (rapporto spire)}$$

Simbolo



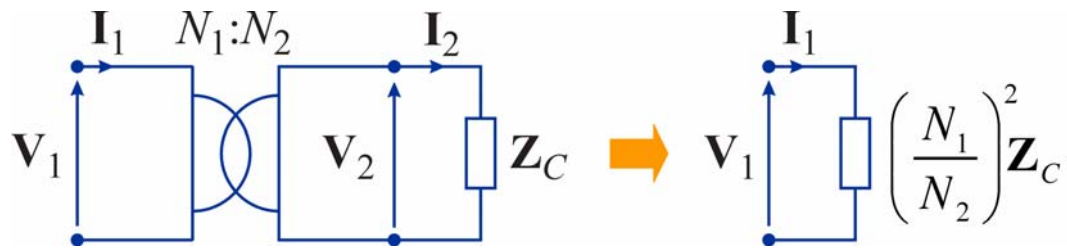
Potenza assorbita

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) - v_2(t) i_2(t) = K v_2(t) \left[\frac{1}{K} i_2(t) \right] - v_2(t) i_2(t) = 0$$

- ➔ La potenza assorbita a primario viene trasferita integralmente in uscita al secondario

18

Trasformazione dell'impedenza di carico



$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_C \mathbf{I}_2$$

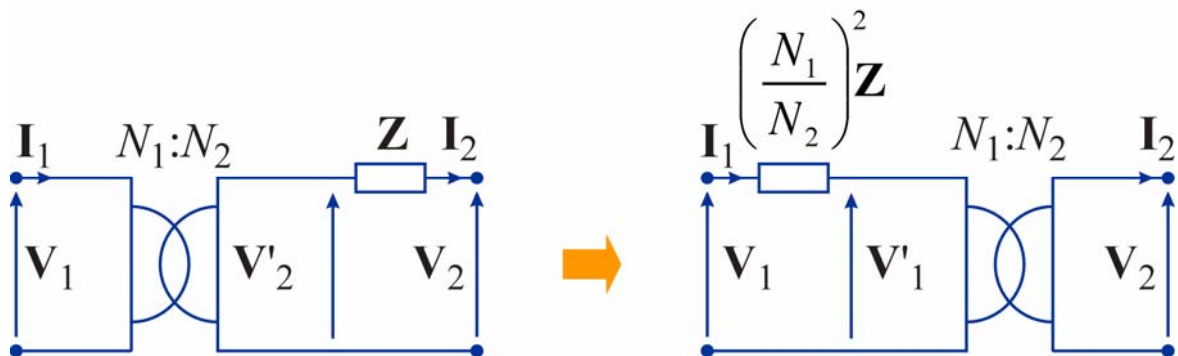
$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{Z}_C \mathbf{I}_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z}_C \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z}_C$$

L'impedenza equivalente ai terminali del primario di un trasformatore ideale con il secondario caricato da un'impedenza \mathbf{Z}_C è pari all'impedenza di carico moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

19

Trasferimento di impedenza (1)



$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}'_2 = \frac{N_1}{N_2} (\mathbf{V}_2 + \mathbf{Z} \mathbf{I}_2)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{I}_1$$

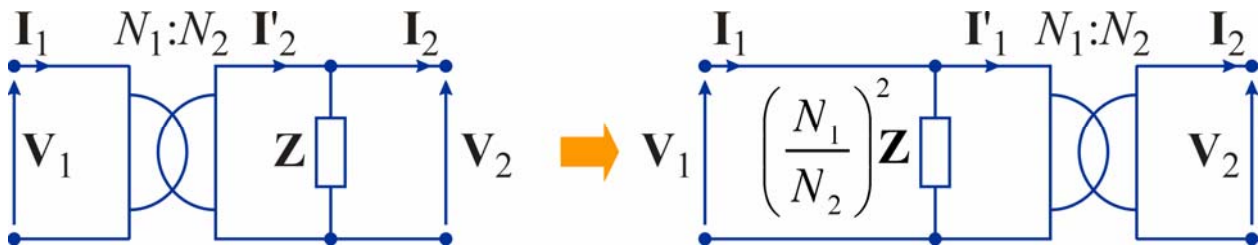
$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z} \mathbf{I}_1$$

$= \mathbf{V}'_1$

Un'impedenza in serie al secondario può essere portata in serie al primario moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

20

Trasferimento di impedenza (2)



$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1} \left(\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}} \right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{I}_1 = \underbrace{\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2}_{= \mathbf{I}'_1} + \frac{\mathbf{V}_1}{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z}}$$

Un'impedenza in parallelo al secondario può essere portata in parallelo al primario moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

21

Corrente magnetizzante e corrente attiva (1)

- L'equazione del circuito magnetico può essere posta nella forma

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a$$

- ♦ **Corrente magnetizzante**

$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathcal{R} \Phi}{N_1}$$

- La corrente magnetizzante coincide con la corrente che circolando nell'avvolgimento primario con $\mathbf{I}_2 = 0$ produrrebbe il flusso Φ

$$N_1 \mathbf{I}_\mu = \mathcal{R} \Phi$$

- ♦ **Corrente attiva**

$$\mathbf{I}_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi$$

- La corrente attiva determina le perdite nel nucleo

22

Corrente magnetizzante e corrente attiva (2)

- Si indicano con \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 le f.e.m. dovute al flusso principale

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \quad \mathbf{E}_2 = j\omega N_2 \Phi$$

- La corrente attiva \mathbf{I}_a è in quadratura con Φ → è in fase con \mathbf{E}_1

→ Si può porre

$$R_0 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_a} = \frac{j\omega N_1 \Phi}{j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi} = \frac{N_1^2}{K_f} \quad R_0 = \text{resistenza di perdita del nucleo}$$

- La corrente magnetizzante \mathbf{I}_μ è in fase con Φ → è in quadratura con \mathbf{E}_1

→ Si può porre

$$jX_0 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_\mu} = \frac{j\omega N_1 \Phi}{\frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1}} = j\omega \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad X_0 = \text{reattanza magnetizzante}$$

23

Circuito equivalente (1)

- Si riscrivono le equazioni interne facendo uso delle definizioni precedenti

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f)\Phi$$



$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + \frac{N_2}{N_1} \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \left(\frac{1}{R_0} - j \frac{1}{X_0} \right) \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi$$

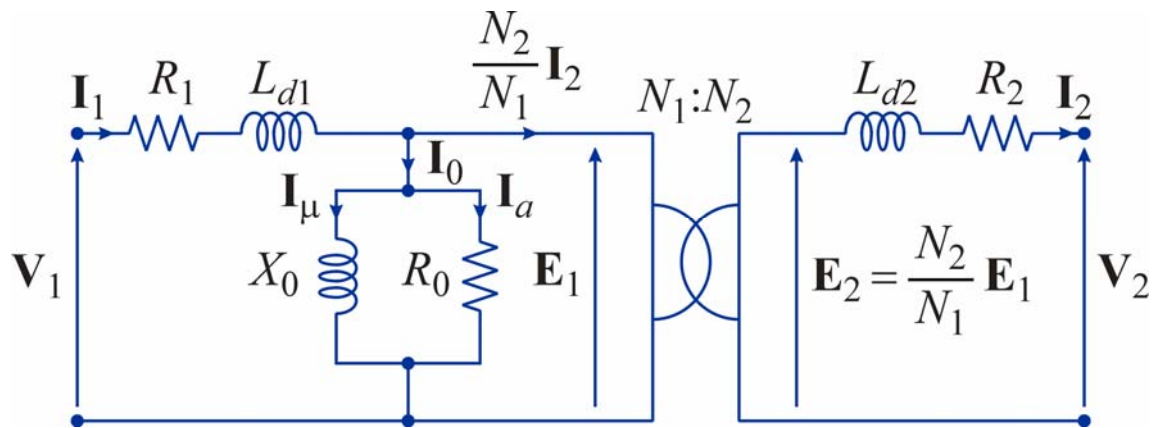
$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1} = -j \frac{\mathbf{E}_1}{X_0}$$

$$\mathbf{I}_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi = \frac{\mathbf{E}_1}{R_0}$$

E' possibile rappresentare queste equazioni mediante un circuito equivalente

24

Circuito equivalente (2)



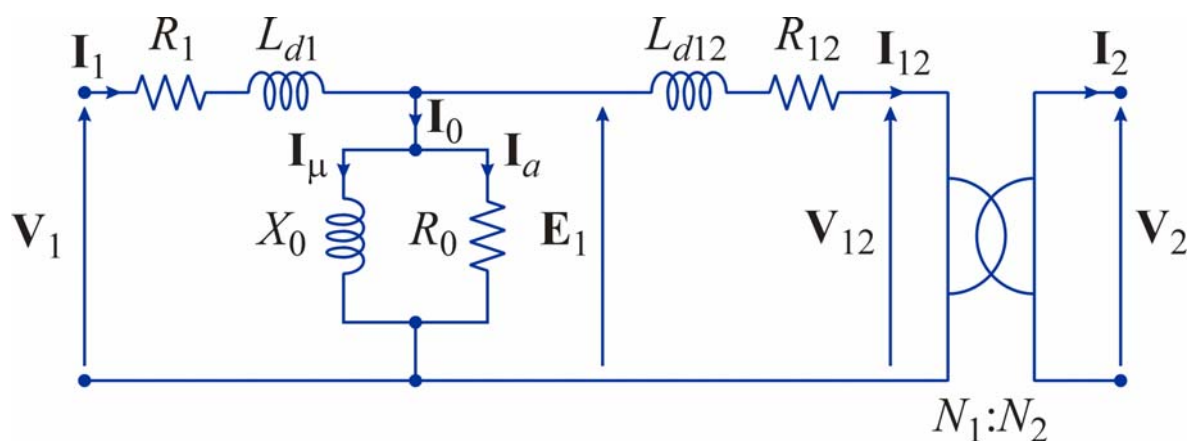
$$V_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})I_1 + E_1$$

$$V_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})I_2 + \frac{N_2}{N_1} E_1$$

$$I_1 - \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_\mu + I_a = \left(\frac{1}{R_0} - j \frac{1}{X_0} \right) E_1$$

25

Circuito equivalente riferito a primario



$$R_{12} = R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$V_{12} = V_2 \frac{N_1}{N_2}$$

Si utilizza la proprietà di trasferimento dell'impedenza

$$L_{d12} = L_{d2} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$I_{12} = I_2 \frac{N_2}{N_1}$$

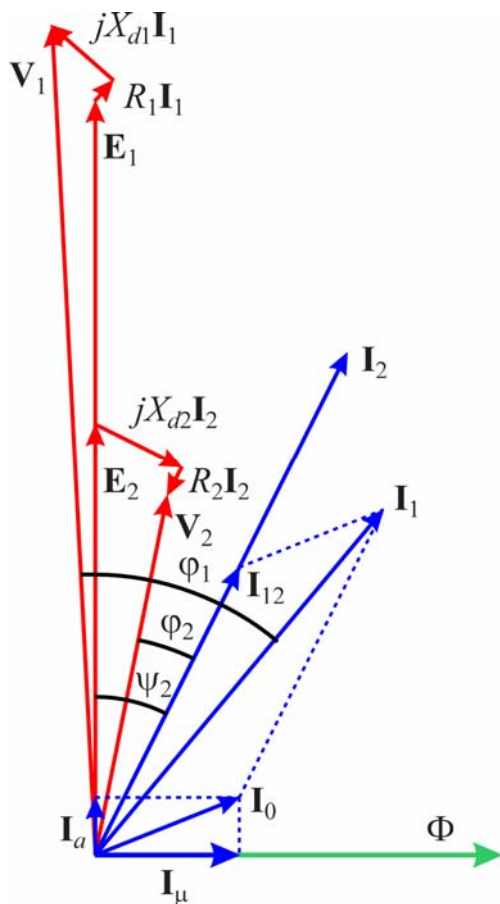
26

Diagramma fasoriale (1)

- Si assume che il primario del trasformatore sia alimentato con una tensione V_1 e il secondario caricato da un'impedenza $Z_C = R_C + jX_C$
- E' possibile rappresentare il funzionamento del trasformatore mediante un diagramma nel piano complesso costruito nel modo seguente:
 - ◆ Si assume (per comodità) uguale a zero la fase di Φ
 - ◆ Si tracciano i vettori rappresentativi delle delle grandezze direttamente legate a Φ : I_μ , I_a , I_0 , E_1 , E_2
 - ◆ Nota Z_C , da E_2 si ricava I_2
 - ◆ Si costruiscono i vettori rappresentativi di I_{12} e di I_1
 - ◆ A partire da I_1 e I_2 si costruiscono i vettori rappresentativi delle cadute di tensione dovute a R_1 , R_2 , X_{d1} , X_{d2} e quindi si ottengono V_1 e V_2

27

Diagramma fasoriale (2)



$$I_\mu = \frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1} \quad I_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi \quad I_0 = I_a + I_\mu$$

$$E_1 = j\omega N_1 \Phi \quad E_2 = j\omega N_2 \Phi$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_C + j(X_{d2} + X_C)} \Rightarrow \psi_2 = \arctg\left(\frac{X_{d2} + X_C}{R_2 + R_C}\right)$$

$$I_{12} = \frac{N_2}{N_1} I_2$$

$$I_1 = I_{12} + I_0$$

$$V_1 = E_1 + (R_1 + jX_{d1})I_1$$

$$V_2 = E_2 - (R_2 + jX_{d2})I_2$$

28

Diagramma fasoriale (3)

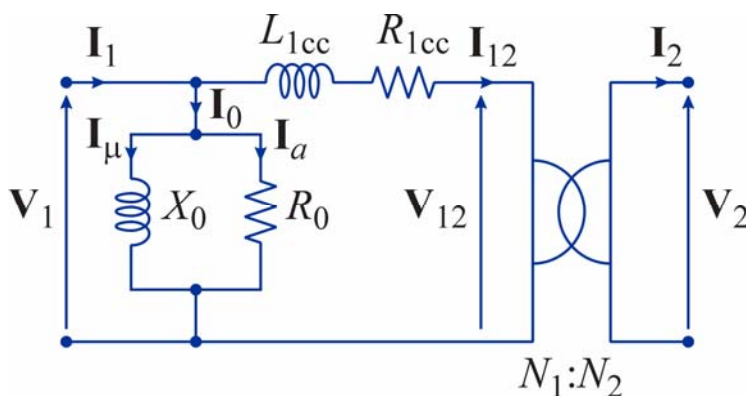
Note

- Il diagramma precedente si riferisce al caso di un'impedenza di carico ohmico-induttiva (\mathbf{I}_2 in ritardo rispetto a \mathbf{V}_2)
- Per rendere più leggibile il diagramma \mathbf{I}_0 e le cadute di tensione su R_1, R_2, X_{d1}, X_{d2} sono state rappresentate fuori scala (normalmente le loro ampiezze sono molto più piccole)
- A causa degli effetti reattivi nel trasformatore, in genere gli angoli di sfasamento tra \mathbf{V}_1 e \mathbf{I}_1 e tra \mathbf{V}_2 e \mathbf{I}_2 risultano diversi

29

Circuiti equivalenti semplificati (1)

- Di solito la caduta di tensione su R_1 e L_{d1} è molto piccola
- In queste condizioni si ha $\mathbf{E}_1 \cong \mathbf{V}_1$
- ➔ Si può semplificare il circuito equivalente, spostando il ramo $R_0 - X_0$
- ➔ In questo modo R_1 e L_{d1} risultano in serie con R_{12} e L_{12}



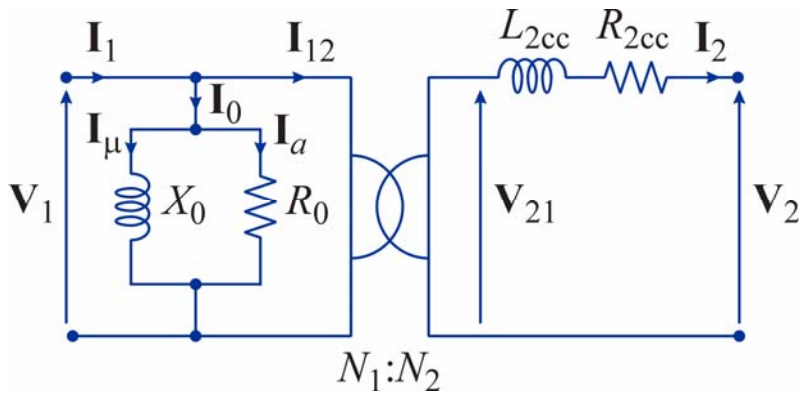
$$R_{1cc} = R_1 + R_{12} = R_1 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$L_{1cc} = L_{d1} + L_{12} = L_{d1} + L_{d2} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

30

Circuiti equivalenti semplificati (2)

- Facendo uso della proprietà di trasferimento dell'impedenza, il ramo $R_{1cc} L_{1cc}$ può essere sostituito con un ramo posto in serie al secondario



$$R_{2cc} = R_{1cc} \frac{N_2^2}{N_1^2} = R_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + R_2$$

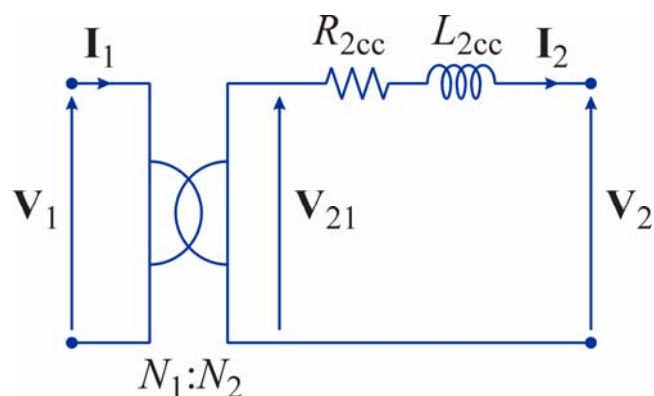
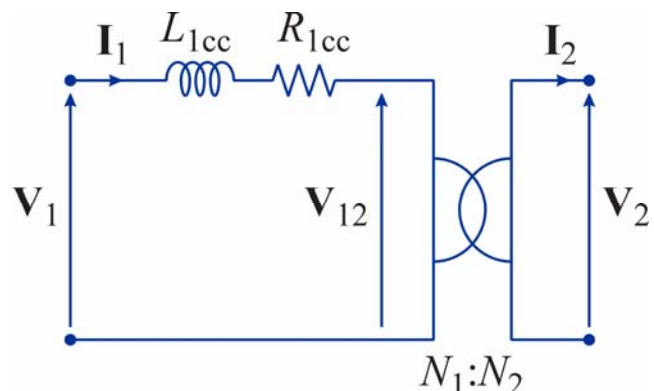
$$L_{2cc} = L_{1cc} \frac{N_2^2}{N_1^2} = L_{d1} \frac{N_2^2}{N_1^2} + L_{d2}$$

31

Circuiti equivalenti semplificati (3)

- Se I_0 è trascurabile rispetto a I_1 (come avviene in generale per un trasformatore in condizioni nominali) è possibile semplificare ulteriormente i circuiti equivalenti eliminando il ramo formato da R_0 e X_0

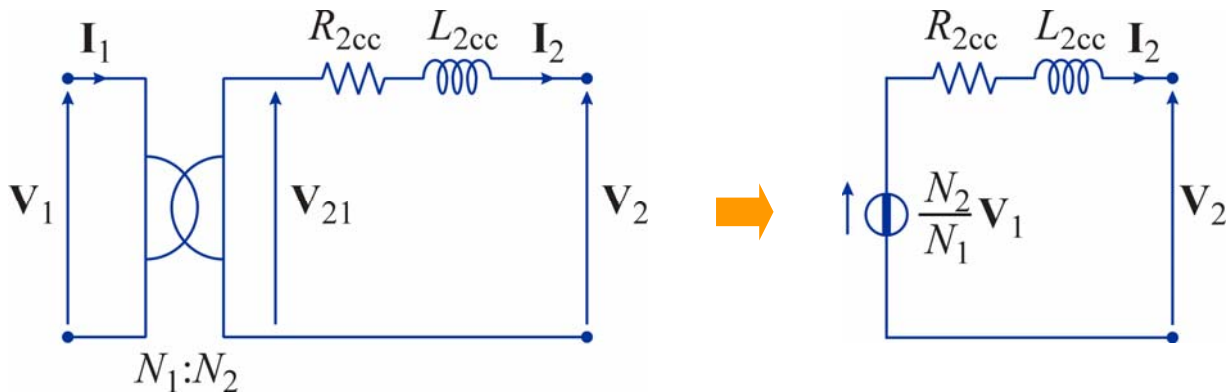
➔ reti equivalenti di Kapp



32

Circuiti equivalenti semplificati (4)

- Se la tensione del primario è imposta, la tensione e la corrente del secondario non dipendono dal ramo formato da R_0 e X_0 e quindi possono essere determinate facendo uso del circuito equivalente semplificato



33

Indipendenza del flusso dalle condizioni di carico

- Se la caduta di tensione su R_1 e L_{d1} è trascurabile si ha

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \cong \mathbf{V}_1$$
- Se \mathbf{V}_1 è fissato (come avviene normalmente) è fissato anche il valore del flusso Φ , che quindi risulta praticamente indipendente dalle condizioni di carico del trasformatore

$$\Phi \cong \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega N_1}$$

- Dall'equazione del circuito magnetico si ricava che deve essere costante anche la quantità

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

- ➔ Se una variazione del carico produce una variazione della corrente del secondario, il trasformatore reagisce con una variazione della corrente del primario tale da mantenere costante la differenza tra i prodotti $N\mathbf{I}$ (**amperspire**) a primario e secondario

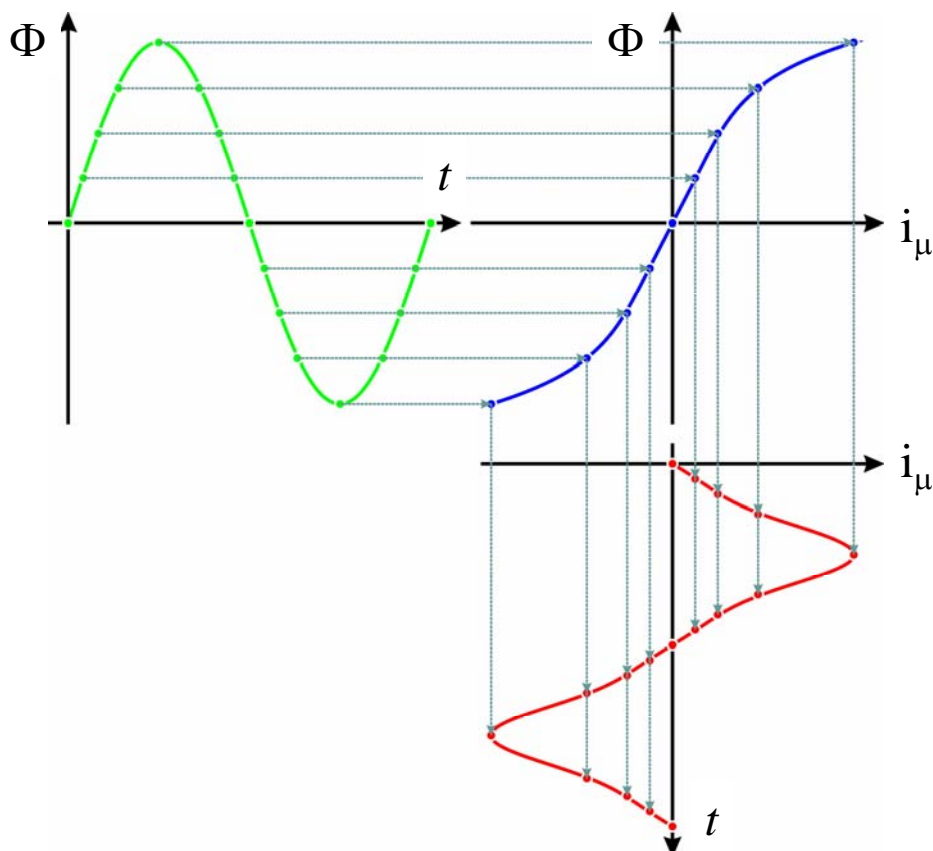
34

Distorsione della corrente magnetizzante (1)

- Se il trasformatore è alimentato con una tensione $v_1(t)$ sinusoidale, anche $e_1(t)$ e quindi $\Phi(t)$ sono sinusoidali
- Se il nucleo non è lineare la corrente magnetizzante $i_\mu(t)$ non può essere sinusoidale, ma risulta distorta
- In particolare si può dimostrare che, in assenza di isteresi,
 - ◆ $i_\mu(t)$ contiene armoniche dispari (pulsazione 3ω , 5ω ecc.)
 - ◆ il contributo principale è costituito dalla terza armonica (che risulta in opposizione con la fondamentale)
- Dato che in genere $i_\mu(t)$ è piccola rispetto alle altre correnti, in prima approssimazione è possibile trattarla come sinusoidale, attribuendole un valore efficace pari a quello della corrente distorta

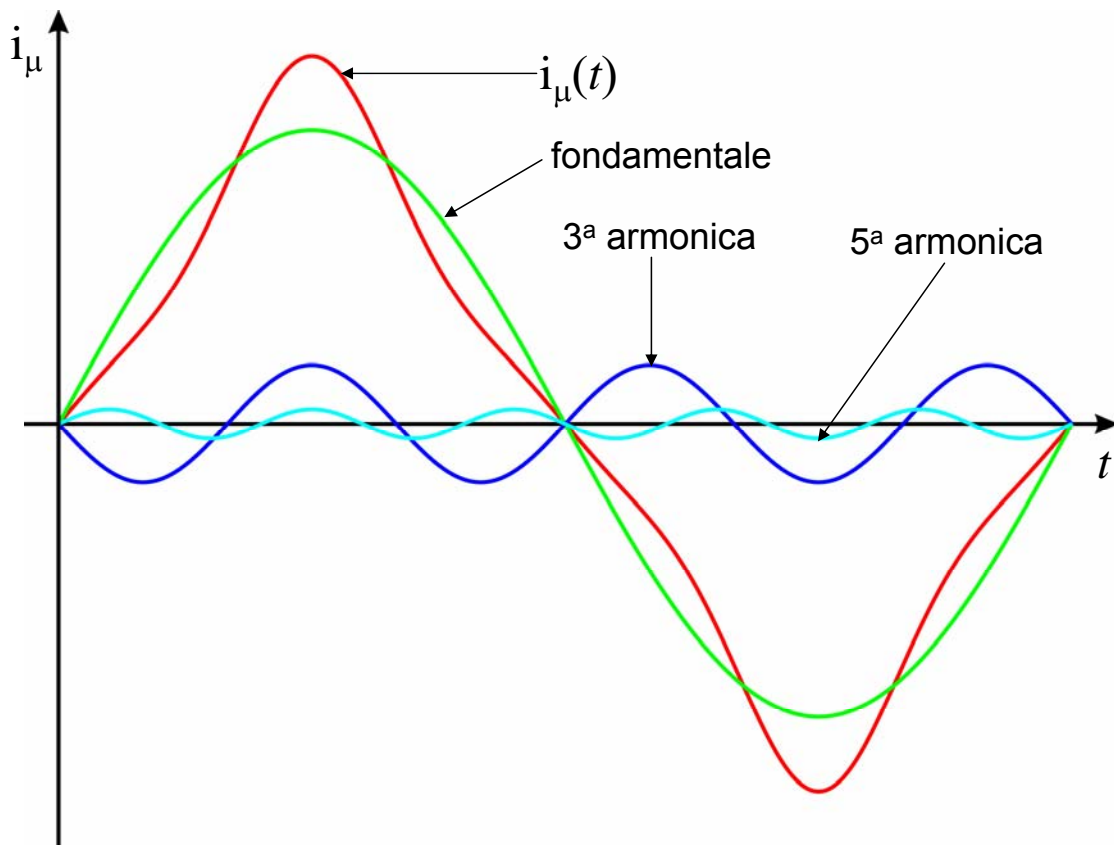
35

Distorsione della corrente magnetizzante (2)



36

Distorsione della corrente magnetizzante (3)



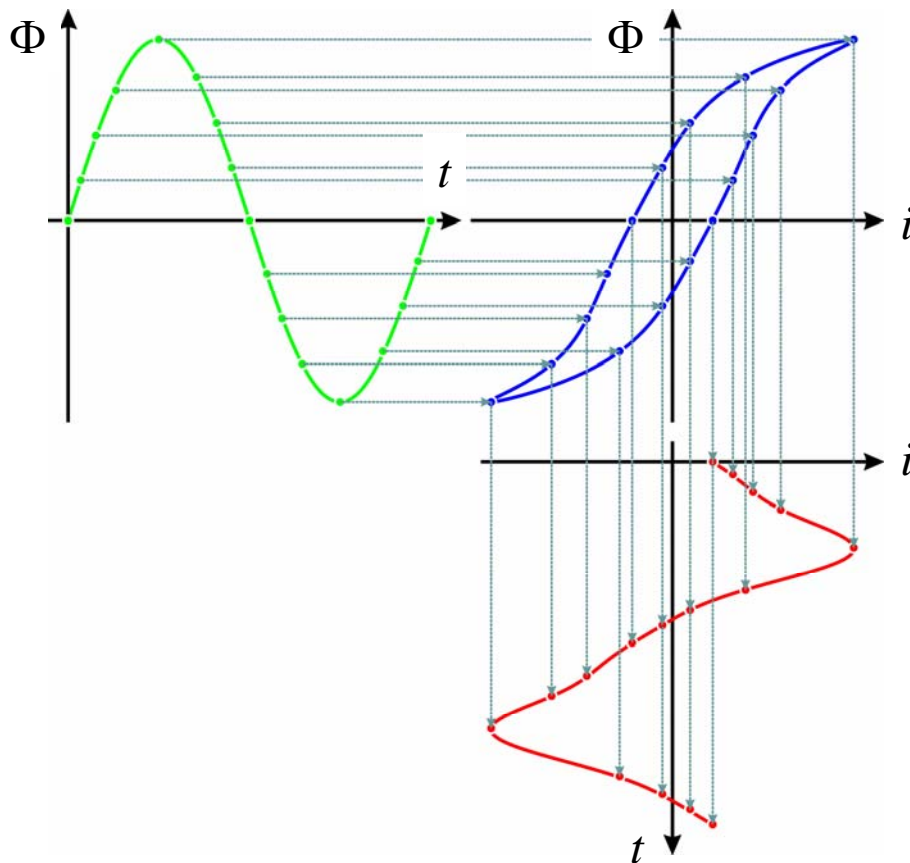
37

Distorsione della corrente magnetizzante (4)

- In presenza di isteresi, alla corrente $i_\mu(t)$ si aggiunge una componente $i_h(t)$ di pulsazione ω , sfasata in quadratura in anticipo rispetto a $i_\mu(t)$
- La corrente $i_h(t)$ risulta in quadratura in anticipo rispetto al flusso e quindi è in fase con la tensione $e_1(t)$
 - ➔ Si ha un assorbimento di potenza attiva, che corrisponde alle perdite nel ferro per isteresi
 - ➔ Il contributo di $i_h(t)$ può essere incluso in $i_a(t)$ dimensionando opportunamente R_0

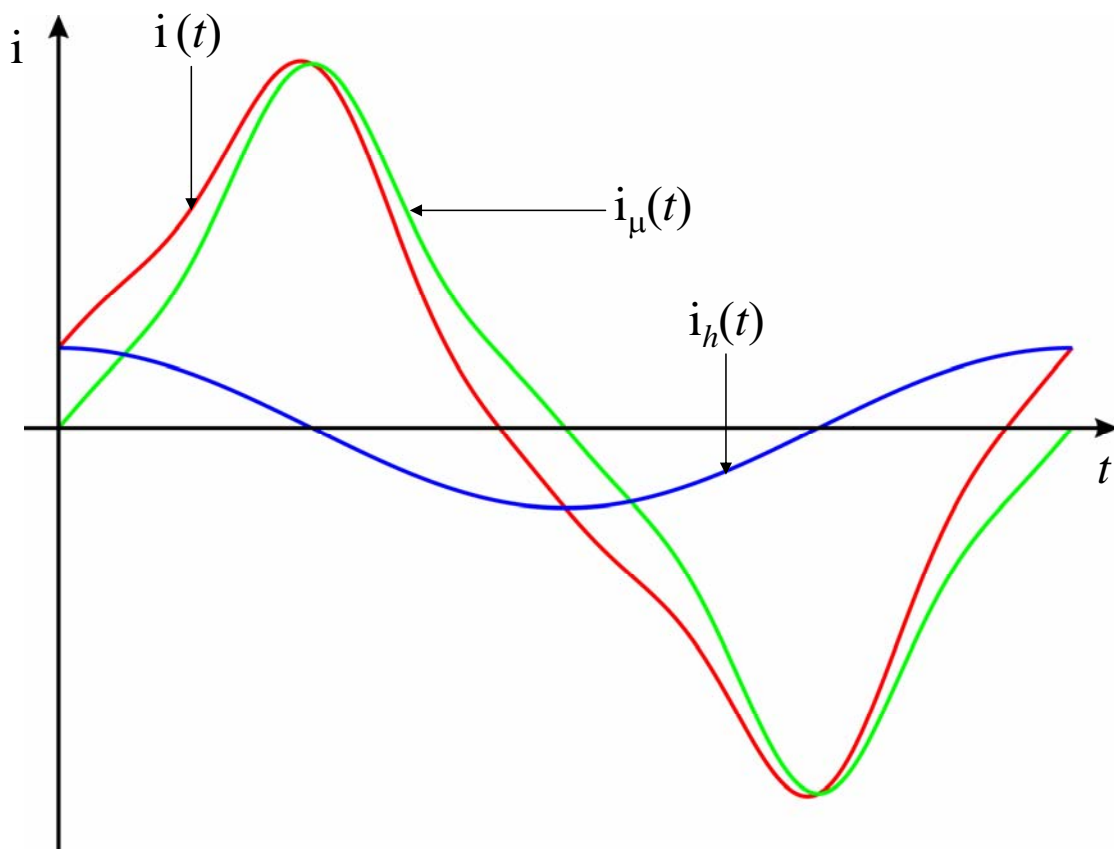
38

Distorsione della corrente magnetizzante (5)



39

Distorsione della corrente magnetizzante (6)



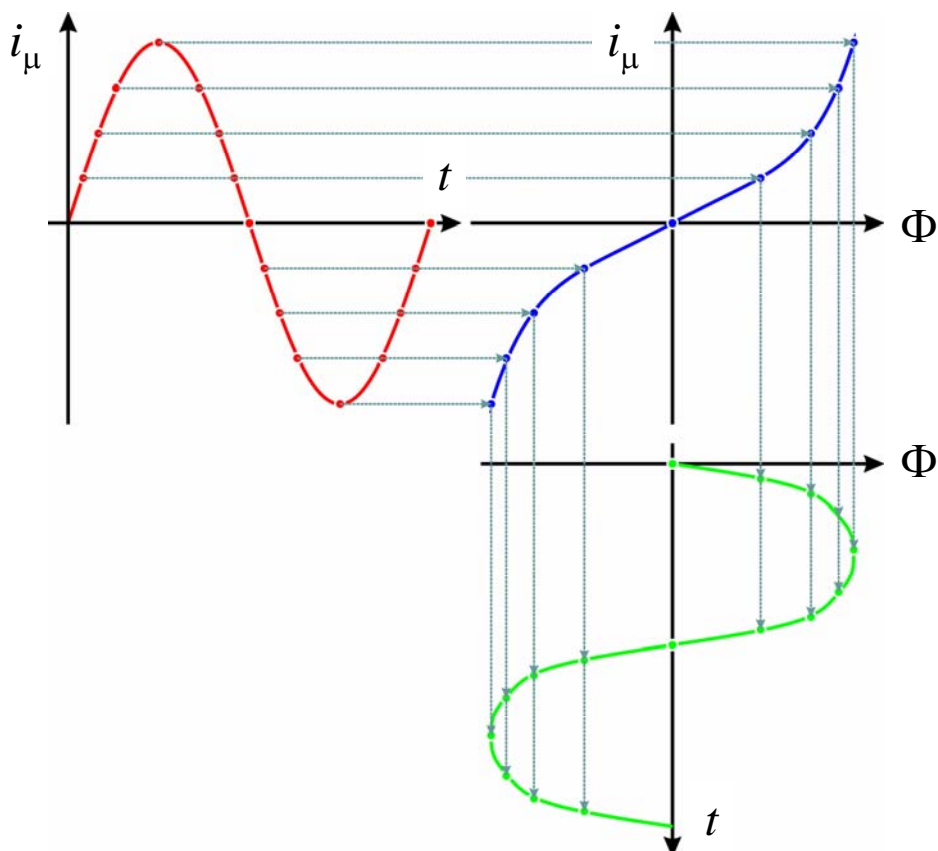
40

Distorsione del flusso (1)

- Se il trasformatore è fatto funzionare in modo da imporre un andamento sinusoidale alla corrente magnetizzante, per effetto della non linearità del nucleo risulta distorto il flusso
- In queste condizioni anche le tensioni sono distorte
- Come si vedrà in seguito, questa situazione si può verificare, ad esempio, nei sistemi trifase
- Si può dimostrare che, in questo caso, il flusso contiene armoniche dispari e che il contributo dominante è dovuto alla terza armonica, che risulta in fase con il flusso stesso

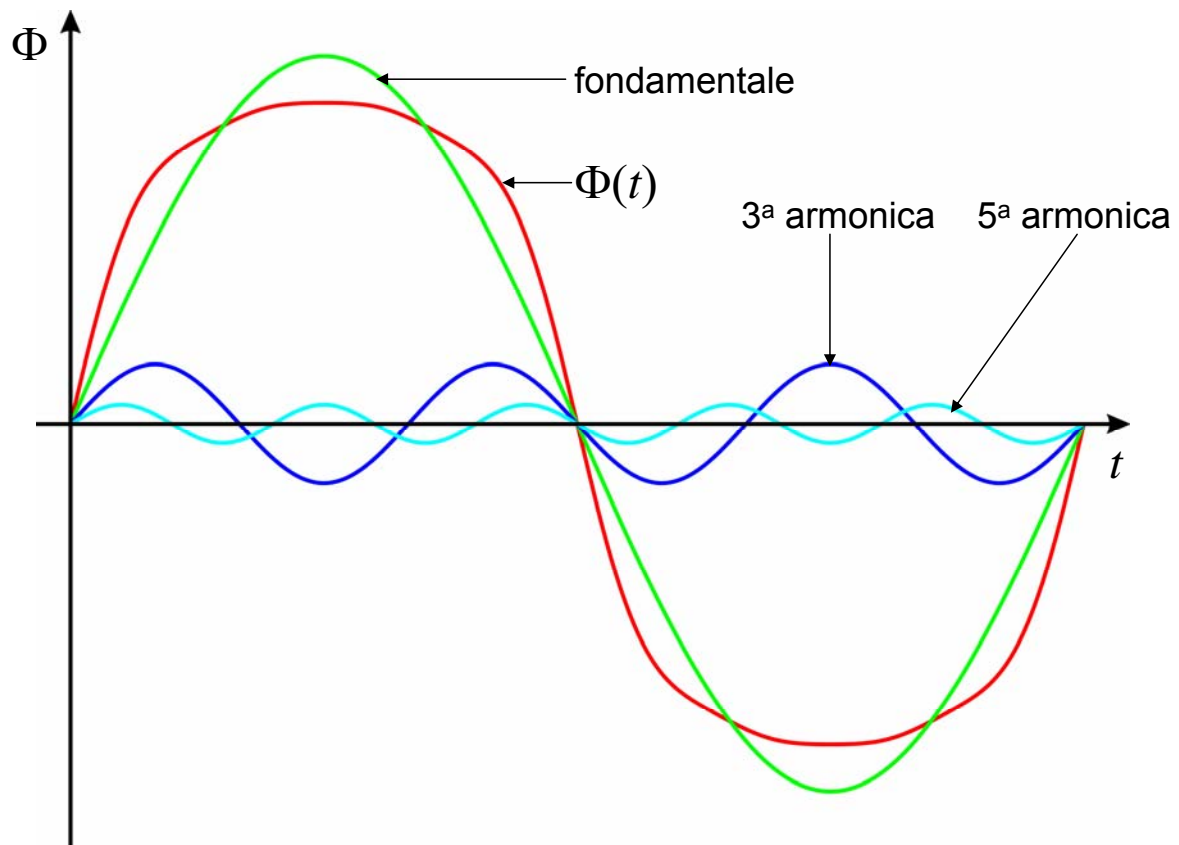
41

Distorsione del flusso (2)



42

Distorsione del flusso (3)



43

Dati di targa

- Un trasformatore è caratterizzato da un insieme di valori nominali che ne definiscono le prestazioni ai fini delle garanzie e del collaudo
- Questi valori, assieme ad altre informazioni, sono riportati su una targa apposta sul trasformatore (**dati di targa**)
- Alcuni dei principali dati di targa sono:
 - ◆ Frequenza nominale: f_n [Hz]
 - ◆ Tensione nominale primaria (valore efficace): V_{1n} [V]
 - ◆ Tensione nominale secondaria a vuoto (valore efficace): V_{20} [V]
 - ➔ Rapporto nominale di trasformazione: $K_0 = V_{1n} / V_{20}$
 - ◆ Potenza nominale (apparente): $S_n = V_{1n} \cdot I_{1n} = V_{20} \cdot I_{2n}$ [VA]
 - ➔ Corrente nominale primaria (valore efficace): I_{1n} [A]
 - ➔ Corrente nominale secondaria (valore efficace): I_{2n} [A]

44

Prova a vuoto (1)

- Al primario viene applicata una tensione di valore nominale
- Il secondario viene lasciato aperto $I_2 = 0$
- Corrente del primario
 $I_1 = I_\mu + I_a = I_0$
 - ➔ il valore è molto inferiore al valore nominale
 - ➔ le perdite nel rame sono trascurabili
- La caduta di tensione su R_2 e L_{d2} è nulla
- La caduta di tensione su R_1 e L_{d1} è molto piccola rispetto al valore in condizioni nominali
 - ➔ il rapporto V_1/V_2 si identifica con quello di un trasformatore ideale
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = K_0 \quad (\text{rapporto di trasformazione nominale})$$
- E_1 e quindi I_a hanno praticamente i valori nominali
 - ➔ le perdite nel ferro coincidono con quelle relative al funzionamento nominale

45

Prova a vuoto (2)

- Il comportamento a vuoto del trasformatore può essere descritto mediante i parametri:
 - ◆ **Corrente a vuoto percentuale**
$$i_0 \% = \frac{I_{10}}{I_{1n}} \cdot 100 \quad I_{10} = \text{corrente a vuoto del primario}$$
 - ◆ **Potenza a vuoto percentuale**
$$P_0 \% = \frac{P_0}{S_n} \cdot 100 \quad P_0 = \text{potenza attiva assorbita a vuoto}$$
 - ◆ **Fattore di potenza a vuoto**
$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{V_{1n} I_{10}}$$
- I tre parametri non sono indipendenti tra loro dato che risulta
$$P_0 \% = \frac{V_{1n} I_{10} \cos \varphi_0}{V_{1n} I_{1n}} \cdot 100 = i_0 \% \cdot \cos \varphi_0$$

46

Prova a vuoto (3)

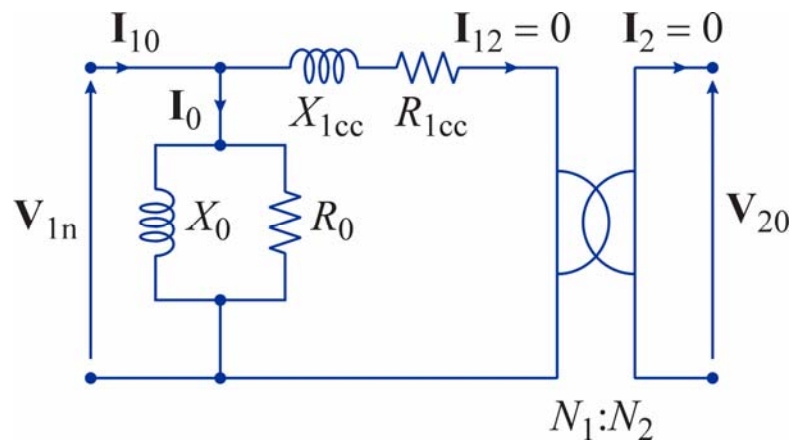
- Noti i parametri S_n , V_{1n} , $i_0\%$ e $\cos\varphi_0$, facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile calcolare i valori di R_0 e X_0

$$P_0 = \frac{i_0\% \cdot \cos\varphi_0}{100} S_n$$

$$Q_0 = P_0 \tan(\arccos\varphi_0)$$

$$R_0 = \frac{V_{1n}^2}{P_0}$$

$$X_0 = \frac{V_{1n}^2}{Q_0}$$

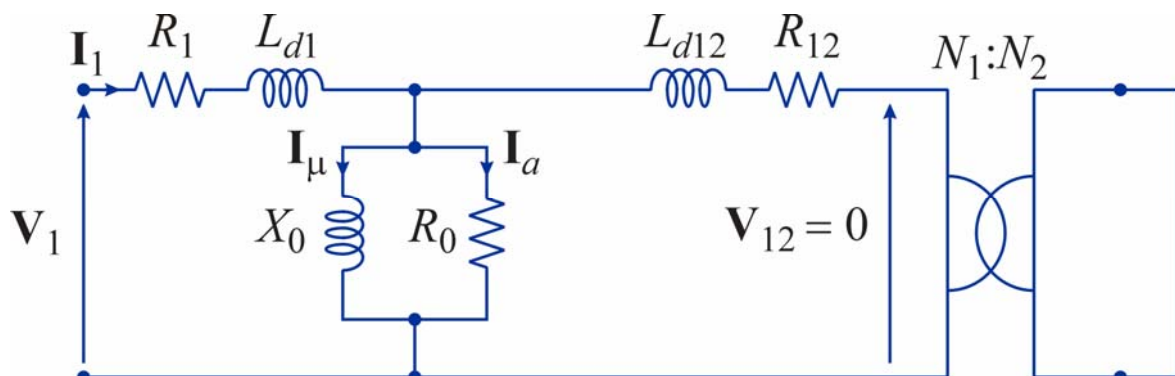


47

Prova in cortocircuito (1)

- Se il secondario è chiuso in cortocircuito $V_2 = 0 \rightarrow V_{12} = 0$
- L'impedenza R_0 X_0 è in parallelo con l'impedenza R_{12} L_{d12}
 - R_0 e X_0 possono essere trascurate perché normalmente R_{12} e L_{d12} sono molto piccole
 - Corrente del primario

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + j\omega L_{d1} + R_{12} + j\omega L_{d12}} = \frac{V_1}{R_{1cc} + j\omega L_{1cc}}$$



48

Prova in cortocircuito (2)

- Le impedenze dovute alle resistenze di degli avvolgimenti e alle induttanze di dispersione sono molto piccole
- Se la tensione a primario ha valore nominale le correnti possono risultare molto grandi rispetto ai valori nominali
 - ➔ eccessivo surriscaldamento dovuto all'effetto Joule
 - ➔ possibili danni dovuti alle forze tra gli avvolgimenti prodotte dalle correnti
- Nella prova in cortocircuito il trasformatore viene alimentato con una tensione V_{1cc} , di valore efficace inferiore a V_1 , tale da fare circolare nel secondario una corrente di valore nominale

49

Prova in cortocircuito (3)

- Le correnti I_1 e I_2 hanno valore nominale (a rigore questo vale solo per il I_2 , ma con ottima approssimazione si può ritenere verificato anche per I_1)
 - ➔ le perdite nel rame sono praticamente coincidenti con quelle relative al funzionamento nominale
- V_1 ha un valore molto inferiori a quello nominale
 - ➔ la corrente I_a e I_μ hanno valori molto piccoli rispetto ai valori in condizioni nominali
 - ➔ le perdite nel ferro sono trascurabili
 - ➔ il rapporto I_1/I_2 si identifica con quello di un trasformatore ideale

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

50

Prova in cortocircuito (4)

- Il comportamento del trasformatore in cortocircuito può essere descritto mediante i parametri:

- Tensione di cortocircuito percentuale**

$$v_{cc} \% = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad (V_{1cc} = \text{Tensione di cortocircuito del primario})$$

- Potenza di cortocircuito percentuale**

$$P_{cc} \% = \frac{P_{cc}}{S_n} \cdot 100 \quad (P_{cc} = \text{potenza attiva assorbita in cortocircuito})$$

- Fattore di potenza in cortocircuito**

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{V_{1cc} I_{1n}}$$

- I tre parametri non sono indipendenti tra loro dato che risulta

$$P_{cc} \% = \frac{V_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc}}{V_{1n} I_{1n}} \cdot 100 = v_{cc} \% \cdot \cos \varphi_{cc}$$

51

Prova in cortocircuito (5)

- Noti i parametri S_n , V_{1n} , V_{20} , $v_{cc} \%$ e $\cos \varphi_{cc}$, facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile calcolare i valori di R_{1cc} e X_{1cc} o di R_{2cc} e X_{2cc}

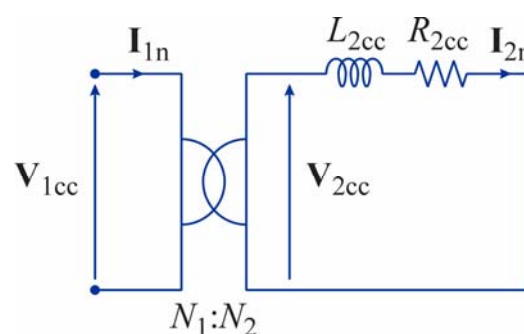
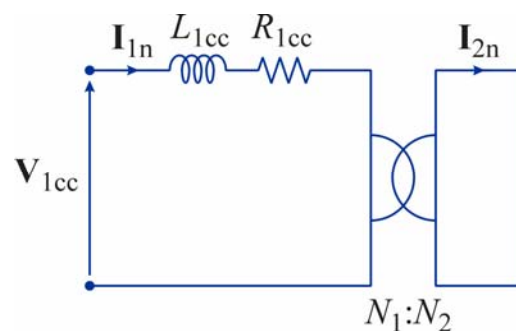
$$P_{cc} = \frac{v_{cc} \% \cdot \cos \varphi_{cc}}{100} S_n$$

$$Q_{cc} = P_{cc} \tan(\arccos \varphi_{cc})$$

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} \quad I_{2n} = \frac{S_n}{V_{20}}$$

$$R_{1cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2} \quad R_{2cc} = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2}$$

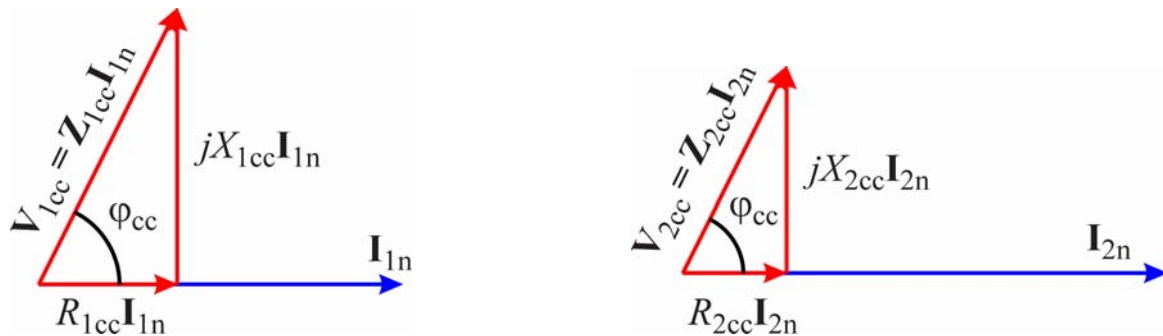
$$X_{1cc} = \frac{Q_{cc}}{I_{1n}^2} \quad X_{2cc} = \frac{Q_{cc}}{I_{2n}^2}$$



52

Triangolo di cortocircuito

- Il funzionamento dei due circuiti equivalenti può essere rappresentato mediante i seguenti diagrammi fasoriali



- Il triangolo formato da V_{2cc} e dalle sue componenti resistiva e reattiva è detto **triangolo di cortocircuito** del trasformatore
- Il triangolo di cortocircuito è definito dai valori di $v_{cc} \%$ e $\cos \varphi_{cc}$

$$v_{cc} \% = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{V_{2cc}}{V_{2n}} \cdot 100$$

53

Caduta di tensione (1)

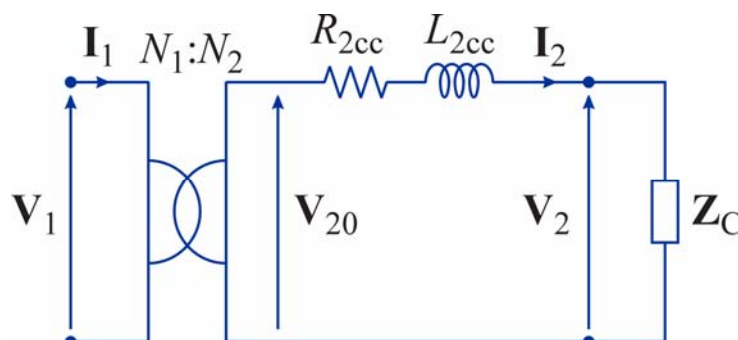
- La **caduta di tensione** è definita come differenza tra i valori efficaci della tensione del secondario a vuoto e a carico

$$\Delta V = V_{20} - V_2$$

- La caduta di tensione percentuale è definita dalla relazione

$$\Delta V \% = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} \cdot 100$$

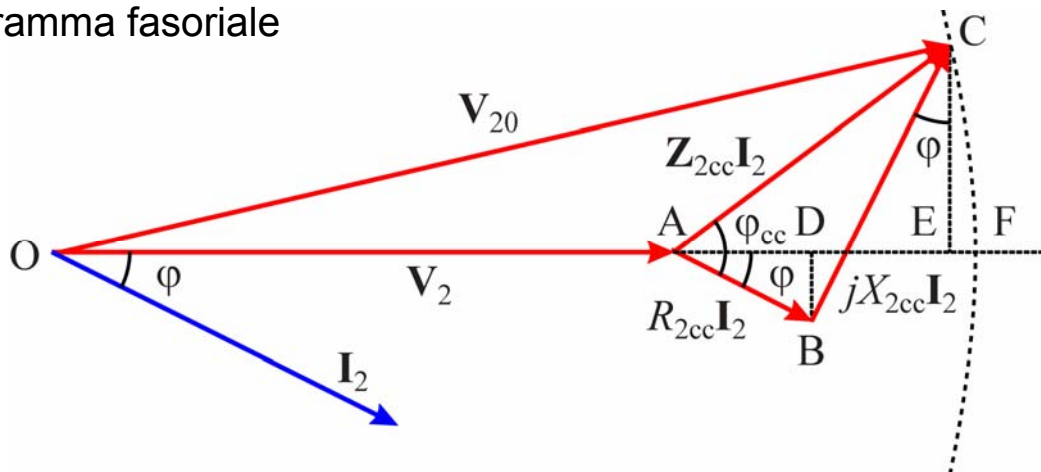
- Per ottenere una valutazione approssimata della caduta di tensione si può fare uso alla rete equivalente di Kapp riferita a secondario



54

Caduta di tensione (2)

- Il funzionamento può essere rappresentato mediante il seguente diagramma fasoriale



- Dato che le cadute di tensione su R_{2cc} e X_{2cc} di solito sono piccole, si può confondere la differenza tra i moduli di V_{20} e V_2 con la lunghezza del segmento AE

$$\overline{AE} = \overline{AC} \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = \overline{AB} \cos \varphi + \overline{BC} \sin \varphi$$

$$\Delta V = Z_{2cc} I_2 \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = R_{2cc} I_2 \cos \varphi + X_{2cc} I_2 \sin \varphi$$

55

Caduta di tensione (3)

- La caduta di tensione si annulla se l'angolo φ di sfasamento tra la tensione la corrente del carico vale

$$\Delta V = 0 \Rightarrow R_{2cc} \cos \varphi + X_{2cc} \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right)$$

- La caduta di tensione è positiva con carichi ohmico-induttivi o con carichi ohmico-capacitivi che introducono sfasamenti non troppo elevati

$$-\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right) < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta V > 0 \quad \rightarrow \text{caduta di tensione}$$

- La caduta di tensione è negativa (e quindi la tensione a carico ha valore efficace maggiore di quello a vuoto) se vale la condizione

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right) \Rightarrow \Delta V < 0 \quad \rightarrow \text{aumento di tensione}$$

56

Rendimento

- Trasformatore alimentato a primario da una tensione sinusoidale con il secondario collegato ad un impedenza di carico

- **Rendimento**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

P_1 = potenza attiva assorbita dal primario
 P_2 = potenza attiva ceduta al carico

- I trasformatori, essendo macchine statiche, hanno rendimenti molto elevati (oltre il 99.5% per i trasformatori di grande potenza)
- ➔ La definizione non è adatta per la misura del rendimento
 - ◆ P_1 e P_2 sono poco diverse tra loro ➔ la valutazione del rapporto è molto sensibile agli errori di misura
 - ◆ Le potenze in gioco possono essere molto elevate

57

Rendimento convenzionale (1)

- Il **rendimento convenzionale** è definito dalla relazione

$$\eta_c = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}}$$

- ◆ P_2 = potenza attiva ceduta al carico
- ◆ P_{Cu} = potenza dissipata a causa delle perdite nel rame
- ◆ P_{Fe} = potenza dissipata a causa delle perdite nel ferro
- La misura del rendimento convenzionale del trasformatore richiede la valutazione delle perdite nel rame e nel ferro
- ➔ può essere effettuata mediante una prova in cortocircuito e una prova a vuoto
- Il **rendimento nominale** corrisponde al rendimento convenzionale ottenuto con $P_2 = S_n$ (potenza nominale del trasformatore)

58

Rendimento convenzionale (2)

- Il rendimento dipende dalle condizioni di carico

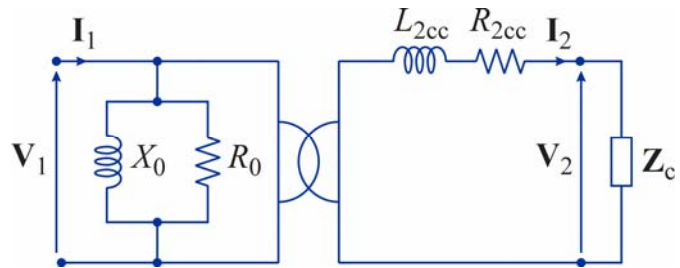
- La potenza attiva ceduta al carico è

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

- La potenza dissipata per le perdite nel rame è

$$P_{Cu} = R_{2cc} I_2^2$$

- Se la tensione del primario è fissata, le perdite nel ferro sono praticamente indipendenti dalla corrente nel carico



- Il rendimento convenzionale si può esprimere come

$$\eta_c = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_2 I_2 \cos \varphi_2 + R_{2cc} I_2^2 + P_{Fe}}$$

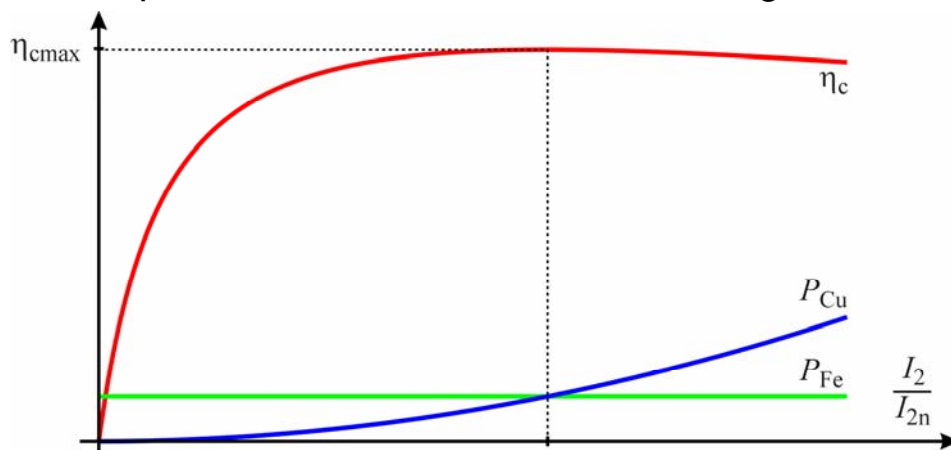
59

Rendimento convenzionale (3)

- Si assume che sia fissato il valore del fattore di potenza
- Si può verificare che al variare del valore efficace della corrente il rendimento è massimo quando

$$\frac{d\eta_c}{dI_2} = 0 \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{R_{2cc}}} \Rightarrow R_{2cc} I_2^2 = P_{Fe}$$

cioè quando le perdite nel rame e nel ferro sono uguali



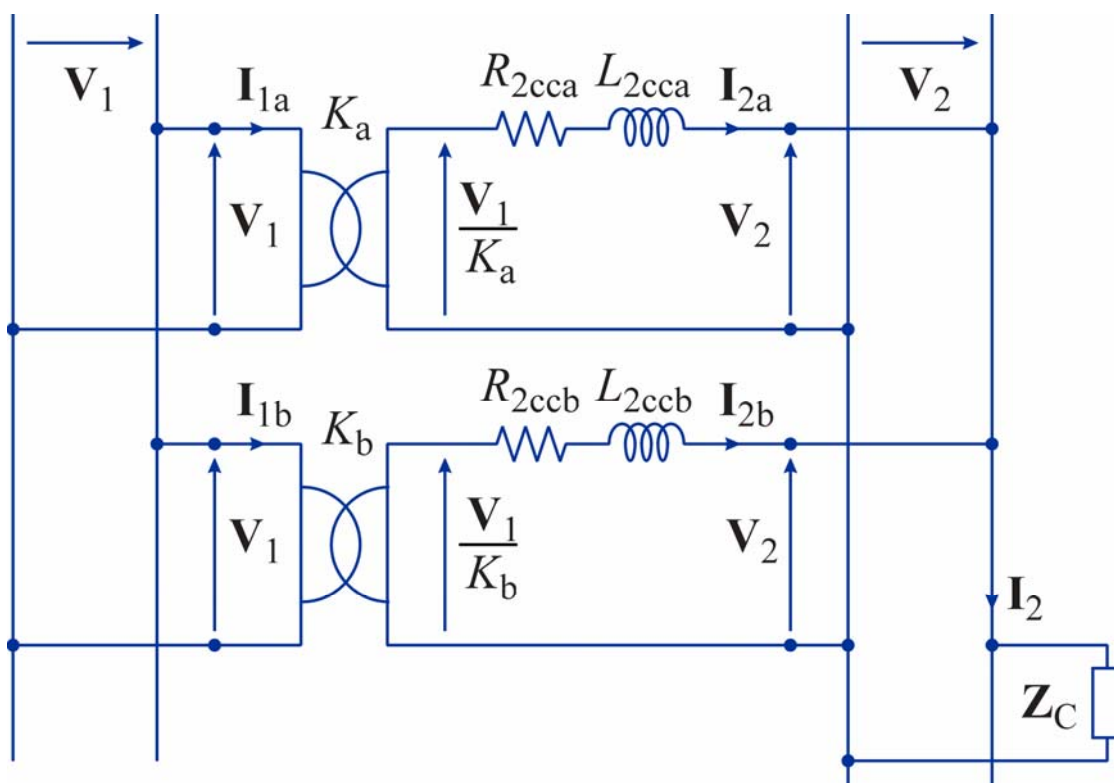
60

Parallelo di trasformatori (1)

- Spesso per trasferire energia tra due linee si utilizzano due o più trasformatori collegati in parallelo
 - ◆ Se il carico è variabile, utilizzando un solo trasformatore dimensionato in funzione della potenza massima, si potrebbero avere periodi in cui la potenza è molto inferiore alla potenza nominale (➔ basso rendimento)
 - ◆ In questo caso conviene utilizzare più trasformatori che possano essere inseriti progressivamente in parallelo tra loro all'aumentare della potenza richiesta
 - ◆ In questo modo i trasformatori lavorano in condizioni più vicine a quelle nominali (➔ migliore rendimento)
 - ◆ Inoltre la presenza di più trasformatori in parallelo consente di garantire la continuità del servizio se è necessario scollegare uno dei trasformatori per guasto o per manutenzione

61

Parallelo di trasformatori (2)



62

Parallelo di trasformatori (3)

- Affinché i trasformatori in parallelo funzionino in condizioni ottimali devono essere verificate le seguenti condizioni
 - ◆ I trasformatori devono avere uguali valori delle tensioni nominali primarie e secondarie (e quindi del rapporto di trasformazione)

$$V_{1na} = V_{1nb} \quad V_{20a} = V_{20b} \quad \Rightarrow \quad K_a = K_b$$

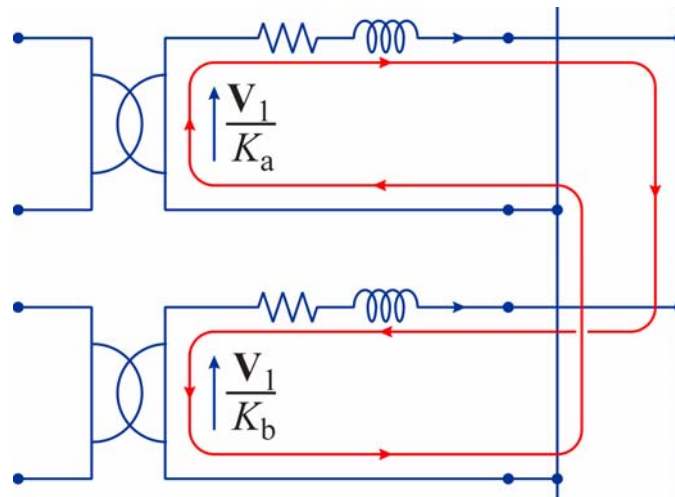
- ◆ Devono essere collegati in modo che le loro tensioni secondarie risultino in fase tra loro
- ◆ Devono avere uguali triangoli di cortocircuito

$$v_{cca} \% = v_{ccb} \% \quad \cos \varphi_{cca} = \cos \varphi_{ccb}$$

63

Parallelo di trasformatori (4)

- Le prime due condizioni impongono che si annulli la f.e.m. totale agente nella maglia formata dai secondari dei trasformatori
- Questo consente di evitare che nel funzionamento a vuoto nella maglia circoli una corrente che darebbe luogo a dissipazione anche con potenza erogata nulla



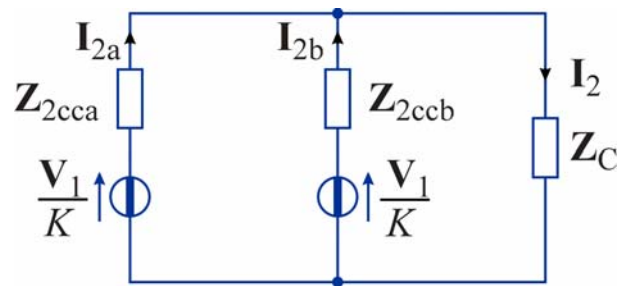
64

Parallelo di trasformatori (5)

- Nel funzionamento a carico si ha

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2b}$$

$$\mathbf{Z}_{cc2a} \mathbf{I}_{2a} = \mathbf{Z}_{cc2b} \mathbf{I}_{2b} \Rightarrow \frac{\mathbf{I}_{2a}}{\mathbf{I}_{2b}} = \frac{\mathbf{Z}_{cc2b}}{\mathbf{Z}_{cc2a}}$$



- A parità di valori efficaci delle correnti \mathbf{I}_{2a} e \mathbf{I}_{2b} , il valore efficace della corrente nel carico è massimo quando le correnti sono in fase tra loro
- In questo caso risulta

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

- Se inoltre si impone che entrambi i trasformatori funzionino a pieno carico, e quindi che le correnti abbiano i valori nominali, deve valere la condizione

$$\frac{\mathbf{Z}_{cc2b}}{\mathbf{Z}_{cc2a}} = \frac{I_{2na}}{I_{2nb}}$$

65

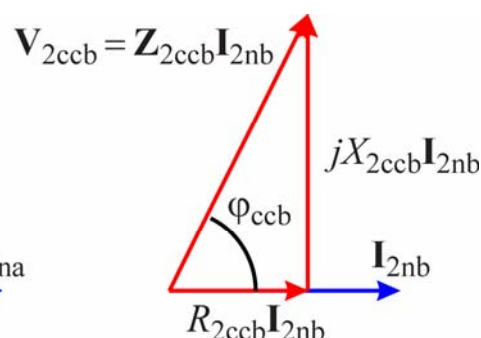
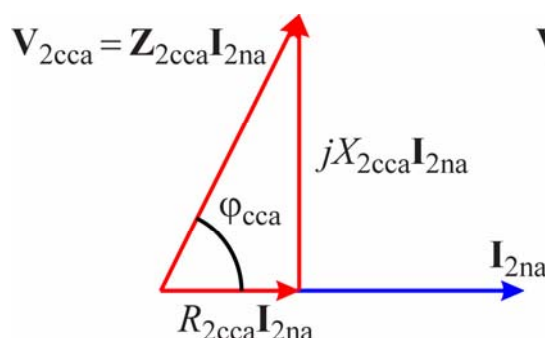
Parallelo di trasformatori (6)

- Il rapporto tra le impedenze \mathbf{Z}_{2cca} e \mathbf{Z}_{2ccb} deve essere reale, quindi per le loro parti reali e le loro parti immaginarie devono valere le condizioni

$$R_{2cca} I_{2na} = R_{2ccb} I_{2nb}$$

$$X_{1cca} I_{2na} = X_{1ccb} I_{2nb}$$

- ➔ I trasformatori devono avere triangoli di cortocircuito uguali e quindi
 - ♦ tensioni di cortocircuito uguali
 - ♦ fattori di potenza di cortocircuito uguali



66

Parallelo di trasformatori (7)

- Quando sono verificate le condizioni precedenti, nel funzionamento nominale si ha

$$S_n = V_{20} I_{2n} = V_{20} I_{2na} + V_{20} I_{2nb} = S_{na} + S_{nb}$$

- ➔ I trasformatori in parallelo si comportano come un trasformatore avente potenza nominale pari alla somma delle loro potenze nominali

- Inoltre in ogni condizione di funzionamento risulta

$$\frac{I_{2a}}{I_{2b}} = \frac{I_{2na}}{I_{2nb}} = \frac{S_{na}}{S_{nb}}$$

- Le correnti, e di conseguenza anche le potenze erogate, si ripartiscono in quote proporzionali alle potenze nominali dei trasformatori